

# Transformation von Koordinaten und Höhen in der Landesvermessung

---

## **Teil I: Theoretische Grundlagen**





**Inhalt**

	Seite
0 Einleitung	6
1 Begriffe und Definitionen	7
1.1 Geodätische Bezugssysteme	7
1.2 Koordinaten und Höhen	7
1.3 Transformationen	8
1.4 Punkte in der Transformation	9
1.5 Restklaffungen	9
2 Bezugsflächen der Landesvermessung	10
2.1 Allgemeines	10
2.2 Landesweite zweidimensionale Lagesysteme	11
2.3 Europaweite zweidimensionale Lagesysteme	18
2.4 Höhensysteme	19
2.5 Verknüpfung der Lage- und Höhensysteme	24
2.6 Globale dreidimensionale Bezugssysteme	25
3 Umrechnung gleichartiger Lage- und Höhensysteme	28
3.1 Umrechnung gleichartiger Höhen	28
3.2 Umrechnung gleichartiger Koordinaten (und Höhen)	29
4 Umformung ungleichartiger Lage- und Höhensysteme	33
4.1 Allgemeines	33
4.2 Umformung ungleichartiger Höhen	35
4.3 Umformung ungleichartiger 2D-Koordinaten	37
4.4 Umformung ungleichartiger 3D-Koordinaten	44
4.5 Verkettete Transformationen	48
4.6 Transformationen höherer Ordnung	48
4.7 Methoden zur Restklaffungsbeseitigung	49
5 Fehlerrechnung und statistischer Test	51
5.1 Allgemeines	51
5.2 Fehlerrechnung	51
5.3 Statistischer Test	53
Literatur	55
Anlagen	62

## Mathematische Modelle

	Seite
<b>Umrechnung gleichartiger Höhen</b>	
A1 Geopotentielle Kote C <---> Dynamische Höhe $H_D$	27
A2 Geopotentielle Kote C <---> Normalhöhe $H_N$	28
<b>Umrechnung gleichartiger 2D-Koordinaten</b>	
B1 Gauß-Krüger $(R, H)_i$ <---> Gauß-Krüger $(R, H)_{i+1}$	29
B2 Gauß-Krüger R, H <---> ellipsoidisch L, B	29
B3 Gauß-Krüger R, H <---> sphäroidisch y, x	29
B4 Gauß-Krüger R, H <---> stereographisch y, x	29
B5 Gauß-Krüger R, H <---> konisch (Lambert) y, x	29
B6 Gauß-Krüger R, H <---> UTM E, N	29
B7 UTM $(E, N)_i$ <---> UTM $(E, N)_{i+1}$	29
<b>Umrechnung gleichartiger 3D-Koordinaten</b>	
B8 X, Y, Z <---> ellipsoidisch L, B, h	30
B9 $\_X, \_Y, \_Z$ <---> $\_L, \_B, \_h$	30
B10 $\_X, \_Y, \_Z$ <---> topozentrisch A, D, Z	31
<b>Umformung ungleichartiger Höhen</b>	
C1 Einparametertransformation	35
C2 Zweiparametertransformation	35
C3 Dreiparametertransformation	35
<b>Umformung ungleichartiger 2D-Koordinaten</b>	
D6 Sechsparametertransformation	38
D5 Fünfparametertransformation	39
D4 Vierparametertransformation	40
D3 Dreiparametertransformation	41
D2 Zweiparametertransformation	42
D1 Einparametertransformation	42
<b>Umformung ungleichartiger 3D-Koordinaten</b>	
E9 Räumliche Neunparametertransformation	45
E7 Räumliche Siebenparametertransformation	45
E6 Räumliche Sechsparametertransformation	45
E4 Räumliche Vierparametertransformation	46
E3 Räumliche Dreiparametertransformation	46
<b>Methoden zur Restklaffungsbeseitigung</b>	
F1 Verteilung nach Abstandsgewichten	48
F2 Verteilung mittels Multiquadratischer Interpolation	49

## 0 Einleitung

Die Kenntnis der unterschiedlichen Bezugsflächen mit ihren Koordinaten- und Höhensystemen sowie die Berechnung von Koordinaten und Höhen mittels Transformation gewinnen in der Landesvermessung zunehmend an Bedeutung. So ist in der Grundlagenvermessung die Auswertung der modernen Satellitenmeßverfahren zur Erneuerung der herkömmlichen Lagefestpunktfelder (2D-Netze) und zum Aufbau eines neuen dreidimensionalen Festpunktfeldes (3D-Netze) ohne Transformationen nicht denkbar. Ebenso kommen die heutigen Meßverfahren der Katastervermessung wie freie Stationierung und rechnerische Grenzuntersuchung sowie die Eingliederung älterer Vermessungen in das Vermessungspunktfeld ohne Transformationen nicht aus. Auch die Kartenerneuerung mittels Digitalisierung sowie der Aufbau der Automatisierten Liegenschaftskarte (ALK) und des Amtlichen Topographisch-Kartographischen Informationssystems (ATKIS) erfordern die Anwendung umfangreicher Transformationen.

Da bisher eine geschlossene Darstellung der Thematik "Transformation von Koordinaten und Höhen" in den nordrhein-westfälischen Vermessungsvorschriften fehlt, werden im Teil I dieser Arbeitsrichtlinie die Bezugsflächen der Landesvermessung mit ihren Koordinaten- und Höhensystemen sowie die gebräuchlichsten Transformationsverfahren zusammengestellt. Der Teil II ergänzt diese Thematik durch praktische Zahlenbeispiele. Weiterführende Literatur zu den Einzelthemen ist am Ende eines jeden Abschnitts angegeben.

Die Umrechnung gleichartiger Koordinaten, die lediglich auf streng mathematischen Formeln beruht, wird in dieser Arbeitsrichtlinie weniger ausführlich behandelt; dazu wird auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen.

Zusätzlich zu diesen Transformationsrichtlinien sind die Vorschriften des TP-, NivP- und VP-Erlasses maßgebend.

### Zur 2. Auflage:

Der Text der vorliegenden zweiten Auflage wurde vollständig überarbeitet, ohne dabei Aufbau und Konzeption zu verändern. Die Abschnitte "Bezugsflächen der Landesvermessung" und "Statistischer Test" wurden teilweise neu geschrieben, womit ihre große praktische Bedeutung zum Ausdruck kommt. Das Literaturverzeichnis ist auf den aktuellen Stand gebracht.

Bonn-Bad Godesberg, im Februar 1999

*Manfred Spata*

## 1 Begriffe und Definitionen

Die in dieser Arbeitsrichtlinie benutzten Bezeichnungen beruhen auf der gebräuchlichen Terminologie in der Landesvermessung. Nachfolgend sind die wichtigsten Begriffe und Definitionen kurz erläutert. Die in Klammern gesetzten Nummern bezeichnen die betreffende Fundstelle in der "Terminologie in der Grundlagenvermessung" (LVermA 1987a).

### 1.1 Geodätische Bezugssysteme

Ein *geodätisches Bezugssystem* kennzeichnet ein mit der Erde verbundenes *Koordinatensystem* (5.35), das geeignet ist, die räumliche Lage von Punkten modellhaft zu beschreiben. Der *Nullpunkt* (5.34) und die Achsen des Koordinatensystems sind an physikalisch ausgezeichnete Punkte, Richtungen oder Flächen gebunden, deren Beziehung zur Erde meßtechnisch erfaßt werden kann. Als Bezugselemente bieten sich z.B. an der Schwerpunkt der Erde, die Richtung der Erdrotationsachse oder die Lotrichtung in einem Erdoberflächenpunkt. Je nachdem, ob die räumliche Lage der Erdoberfläche ein-, zwei- oder dreidimensional erfaßt werden soll, ist ein ein-, zwei- oder dreidimensionales Koordinatensystem zu definieren.

*Eindimensionale Bezugssysteme* dienen vornehmlich zur Darstellung von Höhen, die von einer vorgegebenen Bezugsfläche (z.B. *Äquipotentialfläche* (21.37)) aus nach einer vereinbarten Regel gezählt werden.

*Zweidimensionale Bezugssysteme* dienen zur Darstellung von Grundrissen der auf der Erdoberfläche gegebenen Situation. Als Bezugsfläche wird im allgemeinen ein Erdellipsoid verwendet, auf das die Situation der Erdoberfläche durch Ellipsoidnormale projiziert wird. Als Koordinatensysteme werden Flächenkoordinaten (z.B. Geographische oder Gaußsche Koordinaten) verwendet.

*Dreidimensionale Bezugssysteme* gestatten die geschlossene Darstellung der räumlichen Lage eines Punktfeldes. Als Koordinatensystem eignet sich vor allem ein räumlich-kartesisches XYZ-System, dessen Nullpunkt im Erdschwerpunkt liegt und das mit einer Koordinatenachse an die Erdrotationsachse geknüpft ist.

### 1.2 Koordinaten und Höhen

*Koordinaten und Höhen* der Landesvermessung sind eine geordnete Zahlenmenge, mit der die räumliche Lage eines Vermessungspunktes in einem eindimensionalen *Höhensystem* (21.37) oder in einem zwei- bzw. dreidimensionalen *Koordinatensystem* (5.35) festgelegt wird. In der Landesvermessung werden meist ebene rechtwinklige Koordinaten als Rechtswert (y) und Hochwert (x) sowie polare Koordinaten in der Form von Richtungswinkel (t) und Strecke (s) verwendet.

Die in Nordrhein-Westfalen (NRW) gebräuchlichen Lage- und Höhensysteme der Landesvermessung sind im Abschnitt 2 näher erläutert. Die Koordinaten und Höhen sind in den jeweiligen Systemen durch fortlaufende Verdichtung des Ausgangspunktfeldes unter Wahrung der Homogenität (*Nachbarschaftsprinzip*, 5.45) entstanden.

Wird ein Vermessungsgebiet von unterschiedlichen Lage- und Höhensystemen überdeckt, so besteht häufig die Aufgabe, für einen oder mehrere Punkte Koordinaten und Höhen des einen Systems (*Startsystem*, 5.61) in entsprechende Werte des anderen Systems (*Zielsystem*, 5.96) zu transformieren.

Die grundsätzliche Entscheidung für ein bestimmtes Transformationsverfahren ist abhängig von der Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit der beiden Systeme. *Transformierte Koordinaten und Höhen* (5.73) sind das Ergebnis entweder einer Umrechnung gleichartiger Werte oder einer Umformung ungleichartiger Werte mit oder ohne Verteilung der Restklaffungen.

Nach herkömmlicher Auffassung spricht man von *gleichartigen Koordinaten und Höhen* (5.21) unterschiedlicher Abbildungen, wenn diese durch unmittelbare (direkte) algebraische Berechnung ohne Verwendung von Stützpunkten ineinander überführt werden können. Gleichartige Koordinaten und Höhen sind auch als Ergebnisse verschiedener *Abbildungen* (5.01) ein und derselben Vermessung, zumeist auf dieselbe Bezugsfläche, aufzufassen.

Im Gegensatz dazu spricht man von *ungleichartigen Koordinaten und Höhen* (5.85), wenn die betreffenden Bezugssysteme keine unmittelbare geodätisch-mathematische Beziehung zueinander haben. Ungleichartige Koordinaten und Höhen derselben Abbildung auf derselben Bezugsfläche entstehen auch, wenn bei der Durchführung von Verdichtungs- und Erneuerungsmaßnahmen im Vermessungspunktfeld des jeweiligen Systems das Gebot der Homogenität nicht eingehalten wird.

Koordinaten und Höhen aus unterschiedlichen Bezugssystemen sind untereinander gleichwertig (*gleichwertige Koordinaten und Höhen*, 5.22), wenn sie nach der Transformation den gestellten Genauigkeitsanforderungen des jeweiligen Zielsystems entsprechen.

### 1.3 Transformationen

Eine *Transformation* (5.67) ist eine rechnerische Umwandlung von Koordinaten und Höhen aus einem (alten) Startsystem in ein (neues) Zielsystem. Die mathematischen Beziehungen zwischen Start- und Zielsystem werden durch *Transformationsgleichungen* (5.69) beschrieben, deren *Transformationsparameter* (5.71) entweder vorab bekannt sind oder mit Hilfe von Stützpunkten ermittelt werden. Das *Transformationsgebiet* (5.68) bezeichnet das Feld aller zu transformierenden Punkte; es soll innerhalb des zugehörigen *Stützpunktfeldes* (5.65) liegen.

Die Transformation gleichartiger Koordinaten und Höhen wird im folgenden *Umrechnung* (5.84) genannt (zur Unterscheidung von der Umformung ungleichartiger Koordinaten und Höhen). Wegen der mathematischen Eindeutigkeit treten bei Umrechnungen keinerlei Restklaffungen zwischen ursprünglichen und umgerechneten Punkten auf.

2D-Beispiele: Koordinaten der Preußischen Kataster-Systeme und der Gauß-Krüger-Meridianstreifensysteme bezogen auf das Bessel-Ellipsoid, Koordinaten zweier benachbarter Gauß-Krüger-Meridianstreifensysteme.

3D-Beispiele: dreidimensionale Koordinaten X, Y, Z und ellipsoidische Werte L, B, h eines Bezugsellipsoids.

Wegen der fehlenden mathematischen Eindeutigkeit zwischen ungleichartigen Lage- und Höhensystemen ist die *Umformung* (5.77) ungleichartiger Koordinaten und Höhen nur mit Hilfe von Punkten möglich, die in beiden Systemen bereits bestimmt vorliegen (Stützpunkte). Mit diesen Punkten werden die vorgegebenen Transformationsgleichungen entweder eindeutig (ohne Überbestimmung) oder mittels Ausgleichungsrechnung (überbestimmt) gelöst.

Die früher aus rechentechnischen Gründen bevorzugte eindeutige Umformung durch Maschenbildung des Stützpunktfeldes (*maschenweise Transformation*, 5.40) ist heute die Ausnahme; in der Regel werden die Transformationsparameter überbestimmt durch Ausgleichung ermittelt (*Helmert-Transformation*, 5.25), wobei je nach Zweckmäßigkeit kongruente, konforme oder affine Formeln der L2-Norm (Methode der kleinsten Quadrate), der L1-Norm (Robuste Ausgleichung) oder der L $\infty$ -Norm (Minimax-Methode) zugrunde gelegt werden.

2D-Beispiele: Koordinaten einer freien Polaraufnahme und des Vermessungspunktfeldes, durch Digitalisierung gewonnene Tischkoordinaten und Koordinaten des Vermessungspunktfeldes.

3D-Beispiele: Koordinaten des ETRS 89 (System EUREF) und des DHDN (System Netz 77),  
Koordinaten der Systeme WGS 72 und WGS 84.

Bei *verketteten Transformationen* (5.89) liegen mehrere ungleichartige Startsysteme nebeneinander bzw. teilweise oder ganz übereinander vor, die innerhalb einer Berechnung in ein einheitliches, gemeinsames Zielsystem überführt werden.

## 1.4 Punkte in der Transformation

Zur Gruppe der *identischen Punkte* (5.89), die bereits vor einer Transformation (Umformung) sowohl im Startsystem wie auch im Zielsystem koordiniert sind, gehören die

- *Stützpunkte* (5.64), die zur Berechnung der Transformationsparameter der Transformationsgleichungen dienen,
- *Vergleichspunkte* (5.86), die nur zur Verteilung der Restklaffungen, nicht aber zur Berechnung der Transformationsparameter herangezogen werden,
- *Kontrollpunkte* (5.33), die weder Stützpunkte noch Vergleichspunkte sind.

Bei verketteten Transformationen spielen die *Verknüpfungspunkte* (5.90) rechentechnisch eine besondere Rolle; ihre Koordinaten liegen in zwei oder mehreren Startsystemen vor.

Die Gruppe aller in das Zielsystem zu transformierenden Punkte, die nicht identische Punkte sind, werden *Umformungspunkte* (5.82), gekürzt: U-Punkte, genannt.

## 1.5 Restklaffungen

Die Vorteile einer Helmert-Transformation werden durch die Nachteile der *Restklaffungen* (5.53) in den Stützpunkten erkaufte. Zur Wahrung der *Nachbarschaftstreue* (5.46) sind die Restklaffungen nach der Umformung auf die umgeformten Punkte bestmöglich zu verteilen. Dabei erhält jeder Umformungspunkt einen *Anpassungsbetrag* (5.08).

Zur Beurteilung der Lageidentität der Stützpunkte werden die Restklaffungen in einem *Vektorplan* (5.87) graphisch dargestellt.

Literaturhinweise:

FIG 1971, LVerMA 1987a, Schödlbauer 1993

## 2 Bezugsflächen der Landesvermessung

### 2.1 Allgemeines

Eine wesentliche Aufgabe der Landesvermessung ist die Erstellung und Pflege des Raumbezugs auf der Erdoberfläche durch landesweit verteilte Lage- und Höhenfestpunkte sowie durch Referenzpunkte und aktive satellitengeodätische Referenzstationen. Diese Raumbezugssysteme dienen zur Verknüpfung der zahlreichen Vermessungen, die täglich in Nordrhein-Westfalen ausgeführt werden. Sie sind darüber hinaus geodätische Grundlage für die Geocodierung erdoberflächenbezogener Informationen anderer Stellen, die dadurch miteinander verknüpft werden können.

Oft wird bei der Benutzung von Punktkoordinaten und -höhen außer Betracht gelassen, auf welchem Bezugssystem die Angaben basieren, wie das Bezugssystem realisiert ist und welche Abbildungsart vorgegeben ist. Kenntnisse dieser Einzelheiten sind aber wichtige Voraussetzung für fachgerechte Verknüpfung und Transformation von Koordinaten und Höhen untereinander.

Sehr vielfältig erweisen sich diese geodätischen Grundlagen bei näherer Betrachtung. Aus verschiedenen Gründen waren in zurückliegender Zeit Landesvermessungen auf bestimmte, meist national geprägte Gebiete begrenzt. Ein besonderer Grund für diese räumliche Begrenzung war neben militärischen Aspekten der Endzweck einer Landesvermessung: ein bestimmtes Territorium unter Benutzung ebener rechtwinkliger Koordinaten in einer Karte einheitlich darzustellen. Um hierfür günstigste Ergebnisse zu erzielen und die bei einer Abbildung der Erdoberfläche zwangsläufig auftretenden Verzerrungen möglichst gering zu halten, versuchte jeder Staat entsprechend dem jeweiligen Stand der Technik und entsprechend seiner geographischen Gegebenheiten für seinen Bereich optimale Grundlagen zu schaffen und die jeweils beste Abbildungsart einzusetzen.

So entwickelten sich in den einzelnen Staaten eigenständige Landesvermessungen. Uneinheitlich und nach eigenem Gutdünken wurden von Land zu Land unterschiedliche geodätische Grundlagen festgelegt. Im folgenden sind die gebräuchlichsten geodätischen Grundlagen für Nordrhein-Westfalen, für die Bundesrepublik und die Nachbarstaaten zusammengetragen, wobei für den nordrhein-westfälischen Teil, entsprechend den heute noch benutzten Koordinaten, ein Rückblick in die Vermessung der vergangenen 170 Jahre erforderlich ist.

Dabei werden die Basisdaten der Lagesysteme durch grundlegende Angaben untereinander vergleichbar gemacht, die als "geodätisches Datum" bezeichnet werden (siehe Anlagen). Klassisch sind dies die Dimensionen des als Bezugs- und Rechenfläche ausgewählten Rotationsellipsoides (Referenzellipsoid) sowie die Lagerung und Orientierung des Netzes auf dem Ellipsoid.

Für die Datumsbestimmung gibt es mehrere Methoden, von denen die beiden folgenden mehrfach in der Landesvermessung praktiziert wurden. Bei der Zentralpunkt-Methode werden im Zentralpunkt, vielfach auch Fundamentalpunkt genannt, die astronomischen Koordinaten  $\lambda$ ,  $\varphi$  den ellipsoidischen Koordinaten  $L$ ,  $B$  gleichgesetzt. Bei der astronomischen Mehrpunktmethod werden in mehreren Festpunkten einer Landesvermessung astronomische Ortsbestimmungen durchgeführt und die Lotabweichungen mit ihren Komponenten  $\varphi - B$  und  $(\lambda - L)\cos B$  in diesen Punkten durch Ausgleichung minimiert. Unabhängig von den astro-geodätischen Festlegungen müssen Aussagen über die benutzte Abbildung getroffen werden, die durch Abbildungsart und Nullpunktangaben sowie durch Richtung, Bezeichnung und Zählung der Koordinatenachsen beschrieben werden kann.

## 2.2 Landesweite zweidimensionale Lagesysteme

### a) Nordrhein-Westfalen

#### - **ältere Katastergrundlagen**

In Nordrhein-Westfalen (NRW) basieren noch etwa 1/4 der aktuellen Katastervermessungen auf geodätischen Grundlagen aus der Zeit vor der Preußischen Landesaufnahme. In den Übersichtskarten der trigonometrischen Grundlagen des Katasterkartenwerkes sind folgende ältere Netzkategorien aufgeführt:

- O = Ohne Netz oder örtliches Netz,
- N = Dreiecksnetz von Tranchot, Benzenberg und Krayenhoff, Arnsberger, Düsseldorfer, Mindener und Münstersche Dreiecke
- S = Rheinisches Dreiecksnetz (Europäische Gradmessung), Triangulation des Dortmunder Kohlengebietes mit Verbindungs- und Erweiterungsnetzen, Mindener Dreiecke (Vorlaender-Ausgleichung).

Diese Kategorien sind teilweise in der Anlage 2 näher beschrieben; ihre Koordinaten sind ungleichartig zu denen der späteren Kataster- und Gauß-Krüger-Systeme.

#### - **Vorläufige preußische Katastersysteme**

Nach dem Entwurf der *"Anweisung für das Verfahren bei der Erneuerung der Karten und Bücher des Grundsteuerkatasters"* vom 4. Mai 1877 wurde der Anschluß von Neuvermessungen an das übergeordnete trigonometrische Netz gefordert. Dieser Grundsatz wurde 1879 zwingend festgeschrieben durch die *"Bestimmungen über den Anschluß der Spezialvermessungen an die trigonometrische Landesvermessung"*. In den noch nicht von der Preußischen Landesaufnahme triangulierten Gebieten sollte vorläufig an bereits vorhandene ältere Dreiecksmessungen angeschlossen werden, z.B. an TP der Kategorie S (siehe vorlaufender Abschnitt).

In ganz Preußen wurden insgesamt 40 rechtwinklig-sphäroidische Koordinatensysteme gebildet. Die sechs auf das heutige Nordrhein-Westfalen fallenden sogenannten "vorläufigen Kataster-systeme" sind mit ihren Grundlagen in Anlage 2 aufgeführt.

#### - **Endgültige preußische Katastersysteme**

Mit Vorliegen der Ergebnisse der Preußischen Landesaufnahme (siehe nächsten Abschnitt) konnten ab 1894 die vorläufigen durch die endgültigen Katastersysteme ersetzt werden. Die einzelnen Systeme blieben erhalten. Es änderten sich jedoch die Koordinaten und in einzelnen Fällen, wie z.B. beim TP(1) Köln, Dom, Dachreiter, auch die örtliche Lage der Nullpunkte (siehe Anlage 3).

Vor allem aber durch die Änderung der geodätischen Grundlagen sind die Koordinaten der vorläufigen und die der endgültigen Katastersysteme als ungleichartig zueinander zu behandeln. Die Koordinaten der endgültigen Katastersysteme sind hingegen gleichartig zu denen des Systems der Preußischen Landesaufnahme.

#### - **Preußische Landesaufnahme**

Die Preußische Landesaufnahme (PrLA) schuf für die westlichen Provinzen von Preußen ab 1875 von Osten nach Westen fortschreitend eine neue Landesvermessung. In den Jahren 1885 bis 1895 wurde im heutigen Landesgebiet NRW ein Hauptdreiecksnetz beobachtet und berechnet, das dem später sogenannten *Schreiberschen Block* angehört. Den Berechnungen lagen die geographischen Koordinaten des Zentralpunktes Rauenberg in Berlin zugrunde, die von der alten Berliner Sternwarte trigonometrisch übertragen

worden waren (siehe Anlage 4).

Als nach 1910 die Vermarkung des TP Rauenberg zerstört wurde, beabsichtigte man, den westlich benachbart gelegenen Zwischenpunkt 1. Ordnung *Potsdam, Helmertturm* auf dem Gelände des Geodätischen Instituts zum neuen deutschen Zentralpunkt zu erklären. Der Beirat für das Vermessungswesen beschloß 1923 aber, ihm lediglich die geographischen Koordinaten im System Rauenberg zuzuweisen, so daß aus wirtschaftlichen Gründen eine Umrechnung sämtlicher TP auf das neue Datum vermieden wurde. Eine praktische Auswirkung auf das Festpunktfeld im Schreiberschen Block hatte diese rein formale Maßnahme also nicht; sie hat jedoch nach dem zweiten Weltkrieg im militärischen Bereich zu der nicht ganz richtigen Systembezeichnung *Potsdam Datum* geführt. Dieser inzwischen weit verbreitete Begriff hat im Laufe der Zeit in der Form *Potsdam Datum (Zentralpunkt Rauenberg)* amtliche Bestätigung erfahren.

Der Schreibersche Block ist durch das 1859 beobachtete Azimut der Dreiecksseite Rauenberg -> Berlin, Marienkirche orientiert. Sein Maßstab wurde aus fünf Basismessungen, die über die einzelnen Netzteile verteilt sind, im legalen Meter abgeleitet. Das sogenannte *Meter der Landesaufnahme* ist um durchschnittlich 13,355 ppm zu erhöhen, um das internationale Meter zu erhalten. Infolge unvermeidlicher Messungs- und Übertragungsfehler ist der Netzmaßstab aber nicht einheitlich.

Die Hauptdreiecke wurden nach 1885 in mehreren Abschnitten verdichtet. Für alle trigonometrischen Festpunkte I. bis IV. Ordnung liegen neben geographischen Koordinaten auch ebene rechtwinklige Koordinaten vor, die durch konforme Doppelprojektion nach Schreiber entstanden sind. Diese sogenannten *Schreiberschen Koordinaten* haben in der Katasterpraxis keine Bedeutung erlangt.

Vielmehr beschloß 1922/23 der Beirat für das Vermessungswesen, alle Vermessungsergebnisse in einem neuen einheitlichen Koordinatensystem darzustellen, in der konformen Abbildung nach Gauß-Krüger mit 3° breiten Meridianstreifen. Das Reichsamt für Landesaufnahme (RfL) rechnete bis 1933 alle Festpunktkoordinaten in diese Gauß-Krüger-Koordinaten um. Beim gleichzeitig durchgeführten Übergang vom Nullmeridian Ferro (Paris = 20°) auf den neuen Nullmeridian Greenwich verringerte man alle geographischen Längen um den gerundeten Längenunterschied  $dL = 17^{\circ}40'00''$  (um den Blattschnitt der Meßtischblätter unverändert zu belassen).

Auf NRW entfallen die Gauß-Krüger-Meridianstreifensysteme mit den Hauptmeridianen (Mittelmeridianen) 6° und 9° östlich von Greenwich. Die Abszissenachse ist das Bild des Hauptmeridians. Anfangspunkt der Zählung ist der Schnitt der Abszissenachse mit dem Bild des Äquators. Der positive Zweig der Achse weist nach Norden. Der Maßstabsfaktor beträgt  $m_0 = 1$ . Die Ordinaten werden nach Osten hin positiv gezählt. Die Abszissenachse jedes Meridianstreifensystems erhält den Ordinatenwert 500 km, somit erhalten alle Ordinaten stets positive Werte. Ihnen wird ferner eine Kennziffer vorangesetzt, die gleich dem dritten Teil der Längengradzahl des Hauptmeridians ist. Die so ergänzten Ordinaten werden *Rechtswert R*, die Abszissen *Hochwert H* genannt (siehe Anlage 4).

Im Jahre 1927 legte der preußische Finanzminister die Einführung der Gauß-Krüger-Koordinaten auch für Katastervermessungen verbindlich fest. Damit waren die preußischen Katastersysteme entbehrlich geworden. In NRW basieren jedoch noch heute etwa 9 % der Katasterkarten auf den Katastersystemen.

Durch die Einführung des Reichsdreiecksnetzes (RDN) im Jahre 1940 änderten sich im Bereich von NRW die Koordinaten des Festpunktfeldes nicht. Der auf die alte Bundesrepublik entfallende Anteil dieses Netzes wurde nach 1945 das *Deutsche Hauptdreiecksnetz (DHDN)*, nach der deutschen Wiedervereinigung gemeinsam mit dem STN der DDR (siehe Abschnitt d) *DHDN 1990*, genannt.

Innerhalb des Systems der Preußischen Landesaufnahme entstanden im Laufe der Jahre überall dort ungleichartige Koordinaten, wo veränderte, zerstörte oder als zu ungenau erkannte Punkte ohne Rücksicht auf die geodätische Nachbarschaft wiederhergestellt,

ersetzt oder neu eingemessen wurden. Insbesondere entstanden ungleichartige Koordinaten in den Gebieten, wo infolge des Bergbaus Bodenbewegungen auftraten und deshalb mehrmals großflächige Neueinmessungen durchgeführt werden mußten, so u.a. im Ruhrgebiet in den Jahren 1919/20, 1931, 1950/60, 1966 und 1986/87. Ende der 60er Jahre erkannte man durch die vermehrte Anwendung elektronischer Streckenmessung die Schwachstellen des Lagefestpunktfeldes und versuchte, diese durch gezielte, aber nur regional begrenzte Neueinmessungen zu verbessern.

#### - **System Netz 1977**

Mit Hilfe der bis 1977 vorliegenden Winkel- und Streckenmessungen wurde das bestehende, Nordrhein-Westfalen überdeckende Hauptdreiecksnetz überprüft und teilweise neu koordiniert. An der Lagerung und Orientierung, also dem geodätischen Datum, des ursprünglichen Netzes änderte sich dabei nichts. Durch eine breit angelegte Übergangszone sind Netzspannungen zu dem ebenfalls erneuerten Netz in Niedersachsen und zu dem unverändert beibehaltenen PrLA-Netz in Hessen minimiert worden. In Rheinland-Pfalz wird die Netzerneuerung (Netz 1980) in gleicher Weise wie in NRW gestaltet. Dieses sogenannte *Hauptdreiecksnetz 1977* stellt die Grundlage für eine das ganze Landesgebiet NRW abdeckende Netzbereinigung dar und bildet zusammen mit den erneuerten Folge-netzen das neue Bezugssystem *Netz 1977*. Die Erneuerung der TP(1) und (2) wurde 1988 abgeschlossen, die TP-Netze 3. und 4. Ordnung sind noch in Arbeit. Die Gauß-Krüger-Koordinaten des Netzes 77 sind ungleichartig zu denen des PrLA-Netzes.

##### Literaturhinweise:

AdV 1991b, Günther 1977, Klugmann 1992, LVerma NRW 1993a, RMI 1944, Schmidt 1960a und 1995, Schmidt/Siebrunghaus 1978, Spata 1991, 1992 und 1995, Spata et al. 1989, Spata/Lindstrot 1995.

#### **b) Belgien**

Ab Mitte des 19. Jahrhunderts war für Belgien eine zusammenhängende Triangulation vom Kriegsdepot fertiggestellt worden. Die Berechnungen erfolgten auf dem Delambre-Ellipsoid von 1810 in einer Bonneschen Abbildung. Nach dem ersten Weltkrieg führte das belgische Militärkartographische Institut eine teilweise Neumessung und Erweiterung des Dreiecksnetzes durch. Der Neuausgleichung 1924/26 wurde das Hayford-Ellipsoid (1924) sowie als neuer Zentralpunkt der TP(1) Lommel, Signal zugrundegelegt. Für die Abbildung wählte man nun eine winkeltreue Lambert-Projektion, eine Schnittkegelprojektion mit den beiden längentreuen Schnittkreisen  $49^{\circ}50'$  und  $51^{\circ}10'$ . Die Abbildung des Nullmeridians, der wie bisher durch die Sternwarte Uccle in Brüssel verläuft, stellt die y-Achse dar; die x-Achse verläuft senkrecht dazu durch die Kegelspitze (Nullpunkt). Zur Vermeidung negativer Koordinatenwerte erhalten die Ordinaten y Zuschläge von 5400 km und die Abszissen x von 150 km (siehe Anlage 5, Blatt 1). Dadurch liegen die Nullpunkte des Bonne- und Lambert-Systems (leider) so eng beieinander, daß ihre Koordinatenwerte sehr ähnlich sind. Nach dem zweiten Weltkrieg wurde eine Neuberechnung des ganzen Netzes durchgeführt, in die Ergänzungsmessungen der Jahre 1929-49 einfließen. Als Ergebnis erhielt man Lambert-Koordinaten im System LB50. Als nach 1960 neue astronomische Messungen und insbesondere eine Menge von Streckenmessungen vorlagen, führte man abermals eine Gesamtausgleichung durch und schuf das heute gültige System der Lambert-Koordinaten LB 72.

##### Literaturhinweise:

IGM 1953, Schmidt 1960a, Seeger 1993, UN 1976, Watermann 1979

### c) Dänemark

Die 1871 vollendeten Triangulationsarbeiten wurden auf einem eigenständigen Erdellipsoid berechnet, dessen Dimensionen aus dänischen Gradmessungen bestimmt worden waren. Der Ausgangsmeridian dieser Messungen (Kopenhagener Meridian) diente auch als Nullmeridian für die geographischen Koordinaten. Im Jahre 1928 wurde als neue Bezugsfläche für die Landesvermessung das Internationale Erdellipsoid (1924) eingeführt. Sämtliche Längenangaben beziehen sich seitdem auf den Nullmeridian Greenwich. Die Lambertsche Kegelabbildung wurde für Katasterzwecke beibehalten (Systeme 1934 Jylland und Sjælland sowie 1945 Bornholm), nach 1965 aber für topographische Karten ersetzt durch die UTM-Abbildung im System ED 50 (siehe Anlage 5, Blatt 2).

#### Literaturhinweise:

DGI 1979, Seeger 1993, UN 1976

### d) Ehemalige Deutsche Demokratische Republik (DDR)

Die geodätischen Netze aller ehemaligen Ostblockländer einschließlich der DDR bezogen sich einheitlich auf das Krassowski-Ellipsoid (1940) und die geographischen Koordinaten des Observatoriums Pulkowo bei St. Petersburg, die 1942 von Molodenski durch eine Lotabweichungsausgleichung berechnet wurden. Dieses Bezugssystem wird als *System 1942* bezeichnet. In einer gemeinsamen Ausgleichung wurde 1957 das *Einheitliche Astronomisch-Geodätische Netz (EAGN)* der osteuropäischen Staaten berechnet, das in der ehemaligen DDR als Grundlage für das *Staatliche Trigonometrische Netz (STN)* diente. Hierfür wurde die Bezeichnung *System 1942, Realisierung 1957*, in Kurzform: *System 42/57* eingeführt (siehe Anlage 5, Blatt 3). Anfang der 60er Jahre erfolgte in der DDR unter Verwendung zusätzlicher und aktualisierter Messungsdaten eine erneute Ausgleichung des STN. Das System 1942 wurde dadurch beibehalten, daß die Festpunkte entlang der Staatsgrenze zu Polen und zur damaligen Tschechoslowakei als unverändert angehalten wurden (*System 42/63*).

Viele neue Beobachtungen, insbesondere elektromagnetische Streckenmessungen und astronomische Beobachtungen, führten 1983 zu einer Neuausgleichung des EAGN. Der Maßstab des daraufhin neu berechneten STN (*System 42/83*) wurde aus 6 elektrooptisch gemessenen Netzseiten in der Nähe der früheren Grundlinien gewonnen (siehe Anlage 5). Die Gaußschen Koordinaten von 6°-Meridianstreifen waren ausschließlich der militärischen Nutzung vorbehalten.

Neben diesem hochgenauen, nicht veröffentlichten Lagenetz des Systems 1942 wurden für verschiedene Nutzer anderweitige Koordinaten bereitgehalten, die durch Transformation des Systems 1942 auf das Datum des RDN 1940 (Bessel-Ellipsoid) entstanden sind. Das Ergebnis wird als *System 1940* bezeichnet und existiert in den Realisierungen 1963 und 1983. Die entsprechenden Koordinaten tragen die Bezeichnungen 40/63 und 40/83. Für die Festpunkte des Systems 1940 wurden Gauß-Krüger-Koordinaten in 3° breiten Meridianstreifen berechnet; sie waren u.a. Grundlage der sogenannten AV-Karten (Ausgabe Volkswirtschaft der topographischen Kartenwerke). Die Koordinaten der Systeme 1940 und 1942 sind sowohl untereinander als auch gegenüber denen des Systems DHDN ungleichartig.

Nach der Wiedervereinigung beider deutscher Staaten 1990 hatte die AdV 1991 empfohlen, bis zur Einführung des neuen, europaweit einheitlichen Bezugssystems ETRS 89 in den neuen Bundesländern das System 42/83 weiterzuführen, um weitere vorläufige Koordinatensysteme zu vermeiden. Dennoch sind länderspezifische vorläufig-amtliche Lagebezugssysteme geschaffen worden, so in

- **Sachsen** das *Rauenberg Datum 1983 (RD 83)* mit Gauß-Krüger-Koordinaten und Bezug zum Bessel-Ellipsoid,

- **Thüringen** das *Potsdam Datum 1983 (PD 83)* mit Gauß-Krüger-Koordinaten und Bezug zum Bessel-Ellipsoid (aber nicht identisch mit dem Potsdam Datum des Systems PrLA),

- **Berlin** das *Netz 88*; dabei handelt es sich um das erneuerte 18. Katastersystem Müggelberg mit Soldner-Koordinaten und Bezug zum Bessel-Ellipsoid. Das Netz 88 wurde nach 1990 aus städtebaulichen Gründen auch auf Ostberlin ausgeweitet. Darüber hinaus existieren dort weitere örtliche Systeme, u.a. 18/1, 18/2 und 18/3, die durch Transformation des Systems Müggelberg auf das System 42/83 entstanden sind.

Somit führen nur die Länder Mecklenburg-Vorpommern, Brandenburg (seit 1996 ETRS89!) und Sachsen-Anhalt AdV-konform das System 42/83 bis auf weiteres fort.

Literaturhinweise:

AdV 1991b, Ihde 1991, Isotov 1961, Reichardt 1989, Seeger 1995, Schmidt 1995

## e) Frankreich

Nach 1900 fand eine vollständige Erneuerung des französischen Dreiecksnetzes statt. Diese sogenannte *Nouvelle Triangulation Française (NTF)* löste die Triangulation von Beginn des 19. Jahrhunderts ab, die auf das Delambre-Ellipsoid (1810) bezogen war. Jetzt legte man das Clarke-Ellipsoid (1880) zugrunde, hielt aber den bisherigen Zentralpunkt Paris, Panthéon unverändert bei. Gleichzeitig wurde die konforme Lambert-Abbildung eingeführt (siehe Anlage 5, Blatt 4).

Im militärischen Bereich wählte man für die Schnittkegelprojektion die beiden Schnittbreitenkreise 53 und 56 Gon. Nullpunkt der Abbildung war der Schnittpunkt des Meridians 6 Gon östlich Paris mit dem Breitenkreis 55 Gon. Dieses sogenannte System *Lambert Nord de Guerre* wurde 1939 durch das seit 1921 im zivilen Bereich eingeführte System ersetzt, bei welchem man zur Minimierung der Abbildungsverzerrungen wegen der großen Nord-Süd-Ausdehnung des Landes vier getrennte Lambert-Abbildungssysteme verwendet.

Die Nullpunkte sind jeweils die Schnittpunkte des Pariser Meridians mit den Breitenkreisen 55 Gon (I. Zone), 52 Gon (II. Zone), 49 Gon (III. Zone) und 46,85 Gon (IV. Zone zur Abdeckung der Insel Korsika). Jeweils 1 Gon nördlich und südlich davon liegen die längentreu abgebildeten Schnittbreitenkreise. Zur Vermeidung von negativen Koordinaten erhalten die Nullpunkte der I. bis III. Zone Zuschläge von jeweils 600 km für den Rechts- und 200 km für den Hochwert, in der IV. Zone Zuschläge von 234,358 km bzw. 185,861 km.

Im Jahre 1994 beschloß Frankreich ein neues dreidimensionales geozentrisches Referenzsystem, das *Réseau Géodésique Français (RGF)*. Das RGF besteht aus drei Hierarchiestufen, dem *Réseau de Référence Français (RRF)* bestehend aus 23 Punkten als Teil des EUREF-Netzes im ETRS 89 (siehe Abschnitt 2.6), dem *Réseau de Base Français (RBF)* bestehend aus rund Tausend Punkten mit 25 km Abstand und dem *Réseau de Détail Français (RDF)*. Daneben wird das bisherige NTF mit seinen Lambert-Koordinaten beibehalten.

Literaturhinweise:

Nagel 1982, Seeger 1993, UN 1976, Weber 1966

## f) Luxemburg

In den Jahren 1927/29 wurde vom Belgischen Militärkartographischen Institut in Brüssel das Dreiecksnetz 1. Ordnung im Großherzogtum Luxemburg neu trianguliert und mit dem belgischen und französischen Dreiecksnetz verbunden. Als Zentralpunkt wählte man den nördlichen Endpunkt der 1927 neu gemessenen 5,6 km langen Basis bei Habay-la-Neuve

(in Belgien) (siehe Anlage 5, Blatt 5).

Für die Berechnung der rechtwinkligen Koordinaten legte man das Internationale Ellipsoid (1924) zugrunde und wählte die Gaußsche konforme Abbildung mit dem Schnittpunkt des Breitenkreises  $49^{\circ}50'$  und des Meridians  $6^{\circ}10'$  östlich von Greenwich als Nullpunkt. Um negative Koordinaten zu vermeiden, erhielt der Nullpunkt Zuschläge in  $y = 100$  km und in  $x = 80$  km.

Literaturhinweise:

Eyschen 1963, Schmidt 1960a, Seeger 1993, UN 1976

## **g)     Niederlande**

Die Niederlande begannen im Jahre 1885 mit einer Neutriangulation, die in der 1. Ordnung bis 1904 abgeschlossen war (*Rijksdriehoeks Datum (RD)*). Die Koordinaten wurden mit verebneten Richtungen auf dem Bessel-Ellipsoid (1841) berechnet, ausgehend vom Zentralpunkt Amersfoort, Turm Liebfrauenkirche, dessen geographische Koordinaten von mehreren astronomisch bestimmten Punkten abgeleitet worden waren. Der Maßstab war zunächst nur vorläufig durch die 1892 bei Bonn gemessenen Basis bestimmt, indem die auf die Hauptdreiecksseite Ubagsberg - Klifsberg übertragene Länge als Ausgangslänge für alle niederländischen Dreiecke diente. Als die erst 1913 bei Stroe gemessene Basis von 4,3 km Länge keine nennenswerten Unterschiede zu den als vorläufig angenommenen Strecken aufwies, behielt man den Maßstab bei und erklärte ihn für endgültig (siehe Anlage 5, Blatt 5).

Rechtwinklige verebnete Koordinaten erhält man durch eine konforme Doppelprojektion; man projiziert das Ellipsoid zunächst auf eine Kugel mit dem Radius, der gleich ist dem mittleren Krümmungsradius des Ellipsoids im Zentralpunkt und dann mit Hilfe der stereographischen Projektion auf die Ebene. Die y-Achse als Projektion des Meridians durch den Nullpunkt Amersfoort zählt nach Norden positiv, die x-Achse senkrecht dazu positiv nach Osten. Um negative Koordinatenwerte zu vermeiden, hat ab 1938 der Nullpunkt in den Koordinatenverzeichnissen die Zuschläge  $X = 155$  km und  $y = 463$  km erhalten.

Literaturhinweise:

Schmidt 1960a, Seeger 1993, UN 1976

## **h)     Österreich**

Die Messung der dritten Triangulation 1. Ordnung dauerte von 1863 bis 1898 und wurde vom Militär-Geographischen Institut im Zusammenhang mit der Mitteleuropäischen Gradmessung ausgeführt. Referenzellipsoid ist das Bessel-Ellipsoid (1841) mit dem Zentralpunkt Wien, Hermannskogel, Habsburgwarte. Insgesamt wurden 17 Basismessungen durchgeführt, von denen jedoch nur die Basis bei Josefstadt in Böhmen den Maßstab des Netzes bestimmte (siehe Anlage 5, Blatt 6). Eine Neuberechnung des Netzes 1. Ordnung in den Jahren 1970 bis 1972 diente nur wissenschaftlichen Zwecken. Um bei der Abbildung in die Ebene die Verzerrungen gering zu halten, war das ehemalige Staatsgebiet in 7 Katasterkoordinatensysteme eingeteilt, von denen 5 auf dem Gebiet der heutigen Republik Österreich liegen.

Im Jahre 1917 beschlossen Österreich-Ungarn und Deutschland, gemeinsam die Gauß-Krüger-Koordinaten mit  $3^{\circ}$  breiten Meridianstreifen einzuführen. Die Hauptmeridiane sollten von Ferro aus zählen. Während Deutschland 1923 zu Hauptmeridianen mit Bezug auf Greenwich übergegangen ist, entschied sich Österreich aus zwei Gründen für die Beibehaltung der 1921 eingeführten Meridianstreifen mit dem Bezugsmeridian Ferro: Hätte man Greenwich gewählt, würde Wien in zwei Meridianstreifen liegen und für das Staatsgebiet wären 4 statt der heutigen 3 Systeme erforderlich gewesen. Die 3 Meridianstreifen haben

mit Bezug auf Ferro die Bezeichnung M28 ( $28^\circ$  östlich Ferro =  $10^\circ 20'$  östlich Greenwich), M31 ( $31^\circ$  ö.F. =  $13^\circ 20'$  ö.G.) und M34 ( $34^\circ$  ö.F. =  $16^\circ 20'$  ö.G.).

Mit Einführung des neuen Bundesmeldenetzes (BMN) in die Österreichische Karte 1:50 000 (ÖK 50) im Jahre 1992 erhalten die y-Werte der drei Meridianstreifensysteme Zuschläge von 150 km, 450 km bzw. 750 km, um negative Zahlenwerte beim Gebrauch des Gauß-Krüger-Koordinatennetzes zu vermeiden.

Als Basis für ein dreidimensionales satellitengeodätisches Festpunktfeld schuf das Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen (BEV) ein GPS-Netz von ca. 80 AGREF-Punkten im Bezugssystem ITRF 94 (siehe Abschnitt 2.6). Die 1996 gemessene Verdichtungsstufe umfaßt 250 Punkte des österreichischen GPS-Grundnetzes AREF-1.

Literaturhinweise:

Ahrer 1997, Seeger 1993, Wagner 1970, Wernhart 1992

## i) Polen

Das geodätische Datum in Polen beruht auf dem EAGN 1942 der osteuropäischen Staaten (siehe Abschnitt d). Die letzte Realisierung stammt aus dem Jahre 1983 und heißt deshalb "System 42/83". Darin werden Gauß-Koordinaten in  $6^\circ$  breiten Meridianstreifen berechnet.

Literaturhinweise:

Seeger 1993

## k) Schweiz

Das bis heute gültige geodätische Datum in der Schweiz *CH1903* beruht auf der Landes-triangulation der Jahre 1903 bis 1939 (*LV03*). Als Bezugsellipsoid wurde das Bessel-Ellipsoid (1841) gewählt, mit der alten Sternwarte in Bern als Zentralpunkt. Der Netzmaßstab ist bestimmt aus den drei 1880/81 gemessenen Basislinien in Aarberg, Bellinzona und Weinfelden. Für die Abbildung in die Ebene wird seit 1903 einheitlich die winkeltreue, schiefachsige Zylinderprojektion angewendet. Dabei wird zunächst das Ellipsoid auf eine Kugel und von dieser auf einen die Kugel im Meridian von Bern berührenden Zylinder abgebildet. Der Berührungskreis des Zylinders mit der Kugel ist der durch Bern gehende Großkreis, der den Meridian von Bern rechtwinklig schneidet (siehe Anlage 5, Blatt 6).

Diese Doppelprojektion unterscheidet sich von der Gauß-Krüger-Abbildung dadurch, daß die Zylinderachse nicht mit der Erdachse zusammenfällt, sondern mit dieser einen Winkel bildet, der gleich der geographischen Breite von Bern ist. Der Meridian durch Bern wird nach Norden als positive x-Achse angenommen; der im Nullpunkt darauf senkrecht stehende Berührungskreis wird in die Ebene abgewickelt und gegen Osten als positive y-Achse gezählt. Zur Vermeidung negativer Koordinaten erhält der Nullpunkt seit 1918 Zuschläge von  $y = 600$  km und  $x = 200$  km.

Seit 1988 hat das Bundesamt für Landestopographie (L+T) ein neues GPS-Landesnetz (*LV95*) geschaffen. Es besteht aus 104 sorgfältig ausgewählten Festpunkten. Dieses dreidimensionale kartesische Referenzsystem CHTRS95 stimmt zum Zeitpunkt 1993.0 mit dem europaweit einheitlichen Bezugssystem ETRS 89 überein (siehe Abschnitt 2.6). Daneben wird aus praktischen Gründen das bisherige System *CH1903* in Ellipsoid und Abbildung beibehalten. Zur Vermeidung von Verwechslungen mit den *LV03*-Werten wird bei Koordinatenangaben im *LV95* der Nullpunkt mit 1600 km bzw. 1200 km angesetzt.

Literaturhinweise:

Eidgen. Landestopographie 1976 und 1984, Gubler et al. 1996

## I) Tschechien

Das geodätische Datum in Tschechien beruht auf dem EAGN 1942 der osteuropäischen Staaten (siehe Abschnitt d). Die letzte Realisierung stammt aus dem Jahre 1983 und heißt deshalb "System 42/83". Darin werden Gauß-Koordinaten in  $6^\circ$  breiten Meridianstreifen berechnet. Für Katasterzwecke wird weiterhin das "System jednotné trigonometrické site katastrální" (System des einheitlichen trigonometrischen Katasternetzes) mit dem Bessel-Ellipsoid und dem Zentralpunkt Wien, Hermannskogel (siehe Abschnitt h) benutzt.

Literaturhinweise:  
Seeger 1993

## 2.3 Europaweite zweidimensionale Lagesysteme

Nahezu alle europäischen Staaten verfügen derzeit über eigene, untereinander ähnliche geodätische Grundlagen. Da die Berechnungen jedoch meist auf unterschiedlichen Ausgangsdaten und Bezugssystemen basieren, sind die Beziehungen zwischen den Lagesystemen benachbarter Staaten im allgemeinen nicht genau genug bekannt und auch nicht einfacher mathematischer Natur. Im Hinblick auf europaweite Gemeinschaftsaufgaben waren und sind künftig einheitliche geodätische Grundlagen für ganz Europa unerlässlich.

### a) Das Europäische Datum 1950

Von 1945 bis 1947 berechnete das ehemalige Institut für Erdmessung in Bamberg das *Zentraleuropäische Netz (ZEN)*. Als Bezugsfläche diente dabei das Internationale Erdellipsoid von Hayford (1924). Das ZEN ist ein von ausgewählten Dreiecksketten gebildetes Rahmennetz, in dessen westlichem Teil sodann die Füllnetze unter Zwang eingefügt worden sind. Für den deutschen Anteil wurden die Triangulationen des Reichsdreiecksnetzes (RDN) benutzt und zusammen mit den Messungen aus anderen europäischen Ländern ausgeglichen.

Als Rechenausgangspunkt war der Zwischenpunkt 1. Ordnung Potsdam, Helmerdturm festgelegt worden, dessen ellipsoidische Koordinaten einer Lotabweichungsausgleichung entstammen, in der die Quadratsumme der Lotabweichungen von 107 Laplace-Punkten minimiert wurde, zusammen mit der gleichzeitigen Minimierung der Quadratsumme der Laplace-Widersprüche. Die anderen Blöcke des Europäischen Hauptdreiecksnetzes RETrig (*Réseaux Européennes des Triangulations*) wurden bis 1951 durch Zwangsanschluß mit dem ZEN verbunden (siehe Anlage 6).

Dieses sogenannte *Europäische Datum 1950 (ED 50)* war bis 1993 die geodätische Grundlage des gesamten NATO-Kartenwerkes. Als Abbildung wählte man die Universale Transversale Mercatorprojektion (UTM) mit  $6^\circ$  breiten Meridianstreifen und dem Maßstabsfaktor  $m_0 = 0,9996$ . Die Hauptmeridiane der UTM-Meridianstreifen für Nordrhein-Westfalen liegen  $3^\circ$  (Zone 31) und  $9^\circ$  (Zone 32) östlich von Greenwich. Die Abszissenachse erhält den Ordinatenwert 500 km. Die Ordinate wird als Ostwert E (= East), die Abszisse als Nordwert N (= North) bezeichnet. Die UTM-Koordinaten liegen für alle TP vor und dienen mittlerweile auch als geodätische Grundlage anderer internationaler Kartenwerke. Viele zivile Stellen arbeiten mit dem UTM-Meldegitter.

### b) Das Europäische Datum 1987

Zur Verbesserung des Europäischen Dreiecksnetzes wurden mehrere Neuberechnungen durchgeführt, wobei grundsätzlich das Datum des ED 50 festgehalten wurde. Auch die RETrig-Ausgleichungen 1979 und 1987, die mit den Kurzformen ED 79 und ED 87 veröffentlicht wurden, basieren auf dem ED 50, wobei als Ausgangspunkt für die Berechnungen Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen

der TP München, Frauenkirche, angehalten wurde (siehe Anlage 6).

Da das ED 87 auf Westeuropa begrenzt ist und nur ebene Koordinaten beinhaltet, kann es heutigen Ansprüchen an ein europaweites dreidimensionales Bezugssystem nicht gerecht werden. Deshalb fanden die ED87-Koordinaten keinen Eingang in die Praxis der Landesvermessung; sie wurden lediglich für wissenschaftliche Zwecke verwendet. Die verschiedenen ED-Koordinaten sind sowohl untereinander als auch zu den Koordinaten der europäischen Landesvermessungen und den globalen WGS-Koordinaten ungleichartig.

Literaturhinweise:

AdV 1991b, Ehrnsperger 1991, Gigas 1962, Levasseur 1949, Schmidt 1960b, Straßer 1962, Wolf 1949

## 2.4 Höhensysteme

Deutschland und seine Nachbarstaaten handhaben für ihre Höhenmessungen unterschiedliche Höhendefinitionen und Bezugssysteme. Deshalb gibt es an den Grenzen für identische Höhenpunkte mehr oder weniger große Differenzen. In Anlage 7 sind diese Differenzen zusammengestellt. Nachfolgend sind die geodätischen Grundlagen der Höhensysteme und ihre Realisierungen näher beschrieben.

### a) Bundesrepublik Deutschland

In Deutschland beziehen sich die Höhenangaben seit 1879 auf die Höhenbezugsfläche *Normal-Null* (NN-Fläche), die durch einen Normalhöhenpunkt in Berlin (*NHP 1879*) festgelegt war. Durch Nivellement war 1876 die Höhe des NHP an der alten Berliner Sternwarte vom Nullpunkt des Amsterdamer Stadtpegels (NAP) übertragen worden. Als Nullpunkt für die NN-Höhen war somit der Punkt anzusehen, der 37,000 m unter dem NHP lag. Er erhielt die Bezeichnung Normalnullpunkt. In diesem Netz der NN-Höhen wurde bis etwa 1925 gemessen; die NN-Höhen hatten noch keine Schwerereduktion, sie wurden später "NN-Höhen im alten System" genannt.

Kurz vor dem Abbruch der alten Berliner Sternwarte wurde 1912 ein neuer Normalhöhenpunkt (*NHP 1912*) in der Nähe von Hoppegarten (etwa 40 km östlich von Berlin) festgelegt, wodurch sich jedoch an dem Höhenbezug nichts änderte. Danach wurde das gesamte Nivellementnetz mit Anschluß an den NHP 1912 und unter Berücksichtigung der normalorthometrischen Reduktion (NOR) berechnet. Die Höhen heißen "NN-Höhen im neuen System".

Die Entstehung des Niv-Netzes 1. Ordnung vollzog sich in mehreren Teilnetzen, die jeweils für sich ausgeglichen wurden. Im Gebiet von Nordrhein-Westfalen erfolgten die Messungen zwischen 1921 und 1938. Seit 1935 wurde das neue Netz *Reichshöhennetz (RHN)* genannt, nach 1945 lautete die Bezeichnung *Deutsches Haupthöhennetz (DHHN)*, heute *DHHN 12*.

Von 1949 bis 1960 wurde in Nordrhein-Westfalen das vorhandene Höhennetz durch zahlreiche Zwischenlinien 1. Ordnung ergänzt und neu beobachtet. Es entstand jedoch kein homogenes zusammenhängendes Netz, da jede Linie für sich beobachtet, berechnet und an die Höhen noch vorhandener Punkte der älteren Niv-Netze angeschlossen wurde. Durch viele Erhaltungs- und Wiederherstellungsarbeiten, die vornehmlich in den durch Bergbau beeinflussten Gebieten (Bodensenkungsgebiete) erforderlich geworden waren, entstanden im Laufe der Jahre zueinander ungleichartige Höhen innerhalb des "neuen Systems".

Bestimmte Höhenmessungen der Landesvermessungsämter aus den Jahren 1947 bis 1962 wurden von der AdV in einem Guß ausgeglichen und als *Nivellementnetz 1960*

veröffentlicht. Diese Höhen dienen nur wissenschaftlichen Zwecken, sie sind nicht in den amtlichen Nachweis der NivP übernommen worden.

Von 1980 bis 1985 wurde das DHHN neu beobachtet und in einem Guß ausgeglichen. Die zwangsfreie Ausgleichung wurde an den geologisch sicheren NivP Wallenhorst (nördlich von Osnabrück) mit seiner NN-Höhe aus dem Jahre 1928 angehängt. Dieses Ergebnis heißt *Haupthöhennetz 1985 (DHHN 85)*. Die normalorthometrischen Höhen des DHHN 85 haben nach wie vor einen Bezug zum Amsterdamer Pegel. Neben den normalorthometrischen Höhen wurden auch geopotentielle Koten und daraus Normalhöhen für wissenschaftliche Zwecke berechnet. In Nordrhein-Westfalen sind nur die DHHN85-Höhen der NivP(1) in den Nachweis der NivP übernommen worden; Folgeberechnungen der NivP 2. und 3. Ordnung unterblieben zugunsten des neuen gesamtdeutschen DHHN 92.

Das AdV-Plenum beschloß im Oktober 1993, im Zuge der deutschen Einheit für das gesamte Gebiet der Bundesrepublik Deutschland die Niv-Netze 1. Ordnung des DHHN 85 (alte Bundesländer) und des SNN 76 (neue Bundesländer) mit entsprechenden Verbindungsmessungen zu einem neuen bundeseinheitlichen Niv-Netz mit der Bezeichnung *Deutsches Haupthöhennetz 1992 (DHHN 92)* zu verknüpfen. Die zwangsfreie Ausgleichung des DHHN 92 in geopotentiellen Koten ist angeschlossen an den NivP Wallenhorst mit seiner geopotentiellen Kote aus dem Europäischen Nivellementnetz UELN 86 (siehe Abschnitt m). Dadurch ist auch das DHHN 92 an den Nullpunkt des Amsterdamer Pegels angeschlossen. Mit Blick auf ein künftiges, europaweit einheitliches Höhenbezugssystem sind die Höhen des DHHN 92 als Normalhöhen nach der Theorie von Molodenski berechnet. Hierbei werden die Niveauellipsoid-Parameter und die Normalschwereformel des Geodätischen Referenzsystems 1980 (GRS 80) verwendet; die geographischen Koordinaten der NivP beziehen sich auf das ETRS 89 (siehe Abschnitt 2.6). Die Höhen des DHHN 92 werden als "Höhen über Normalhöhennull (NHN)" bzw. als "NHN-Höhen" bezeichnet. Die Differenzen der NHN-Höhen gegenüber den NN-Höhen betragen in NRW maximal 5 cm (Stadt Aachen).

Literaturhinweise:

AdV 1993, Kremers 1994, LVermA NRW 1993b, Müller 1990, Seeger 1993, Schmidt 1986, Schödlbauer 1990, Spata 1998, Vahlensieck/Ottweiler 1951, Waalewijn 1986, Weber 1994, Zimmermann 1979

## **b) Ehemalige DDR**

In der ehemaligen DDR wurden 1953 Normalhöhen nach der Theorie von Molodenski bezogen auf den Pegel Kronstadt eingeführt (siehe Abschnitt m). Die Normalhöhen erhielten die Bezeichnung "Höhen über HN" (Höhen-Null) zur Unterscheidung von den "Höhen über NN" (Normal-Null).

Das *Staatliche Nivellementnetz (SNN)* 1. Ordnung ist in die Gesamtausgleichung des kontinentalen Einheitlichen Präzisionsnivellementnetzes (EPNN) der osteuropäischen Länder eingegangen. Die ursprünglichen Messungen von 1954 bis 1958 wurden ab 1974 wiederholt. Bei der Neuberechnung 1976 wurde der 1912 eingerichtete NHP Hoppegarten mit seiner 1956 von Kronstadt (Höhen-Null) abgeleiteten Normalhöhe als fehlerfrei eingeführt. Diese HN-Höhen haben die Bezeichnung "Normalhöhen 1976 (HN 76)" erhalten und sind bis 1990 die Realisierung des amtlichen Höhensystems der DDR gewesen. Neben den Normalhöhen wurden für die Bereiche der Volkswirtschaft auch weiterhin NN-Höhen vorgehalten.

Literaturhinweise:

Lang/Steinberg 1993, Spata 1998, Zimmermann 1979

**c) Belgien**

In Belgien ist die Grundlage für das Höhensystem das *Nivellement Général* (1873-79), dessen Ergebnisse erstmals 1879 vom Institut Géographique National (IGN) veröffentlicht wurden. Als Nullpunkt für die Höhenangaben gilt das mittlere Niedrigwasser nach Springflut im Hafen von Ostende, das 2,1355 m unter dem dortigen Mittelwasser und etwa 2,3 m unter dem Amsterdamer Pegel liegt. Dadurch werden für tatsächlich unter dem Meeresspiegel liegende Gebiete negative Höhenzahlen vermieden. Die Bezugsfläche der 1960 abgeschlossenen Erneuerung des Höhennetzes 1. Ordnung (*Deuxième Nivellement Général* (DNG)) blieb unverändert. Die belgischen Höhen beinhalten keine Schwerereduktionen.

Literaturhinweise:

Gedon 1995, Heyde 1923, Seeger 1993, Spata 1998

**d) Dänemark**

In Dänemark werden seit 1884 Präzisionsnivellements durchgeführt. Als Bezugshorizont der orthometrischen Höhen diente der im Jahre 1910 in zehn Häfen ermittelte mittlere Wasserstand (*Dansk Normal Null* (DNN)) mit dem Höhenanschluß in Århus. Nach 1957 erfolgte eine Neubestimmung des DNN mit dem neuen Höhenanschluß in Erritsø. Derzeit läuft eine dritte Netzerneuerung von 1982-1994 mit Anschluß an 13 im ganzen Land verteilte Pegel; es wurden wiederum orthometrische Höhen im Datum UELN98 berechnet.

Literaturhinweise:

Gedon 1995, Heyde 1923, Seeger 1993, Spata 1998, EUREF 1999

**e) Frankreich**

Das Höhennetz von Frankreich basiert auf dem Mittelwasserspiegel des Mittelmeeres am Pegel in Marseille. Das *Nivellement Général de la France* (N.G.F.) mit orthometrischen Höhen ist seit 1969 abgelöst vom Nivellement IGN 69 mit Normalhöhen (Vignal-Höhen). Der Berechnung liegen gemessene Schwerewerte im System Europäisches Schwerenet 1962 (Potsdam Datum) zugrunde.

Literaturhinweise:

Gedon 1995, Heyde 1923, Seeger 1993, Spata 1998

**f) Luxemburg**

Das neue Höhennetz *Nivellement Général* (NG) des Großherzogtums Luxemburg wurde 1956 vollendet. Es bezieht sich auf die NN-Höhen in Deutschland durch Anschluß an den NivP Aachen, St. Adalbertkirche mit 166,108 m. Mit der seit 1993 laufenden Erneuerung des NG ist das IGN in Brüssel beauftragt. Der Höhenbezug soll durch drei Anschlußpunkte im System DHN 85 realisiert werden. Nach Fertigstellung des Schwerenetzes sollen Schwerereduktionen berechnet werden.

Literaturhinweise:

Gedon 1995, Heyde 1923, Seeger 1993, Spata 1998

## **g)     Niederlande**

Von 1875 bis 1885 wurde in den Niederlanden das erste Hauptnivellement mit Anschluß an fünf Höhenmarken (Dijkpeilstenen) des Amsterdamer Stadtpegels (AP) aus dem Jahre 1684 ausgeführt. Seit 1891 führt dieser Höhenbezug die Bezeichnung *Normaal Amsterdams Peil* (NAP), um die Höhen des Hauptnivellements nach 1875 deutlich von älteren AP-Höhen vor 1875 unterscheiden zu können. Der Höhenbezug hat sich hierdurch aber nicht geändert.

Das zweite niederländische Hauptnivellement der Jahre 1926 bis 1940 behielt seinen unveränderten NAP-Bezug. Zur dauerhaften Festlegung der NAP-Fläche wurden im ganzen Land verteilt 48 unterirdische Festlegungen in das Nivellement einbezogen. Aus dem gleichzeitigen Anschluß an das deutsche NN-System ergab sich eine durchschnittliche Höhendifferenz  $NN - NAP = +2 \text{ cm}$  (z.B. Höhe in Elten:  $H_{NN} = 14,95 \text{ m}$ ;  $H_{NAP} = 14,93 \text{ m}$ ).

Der unveränderte Höhenbezug auf den NAP wurde 1950-59 und 1965-78 vom zuständigen "Meetkundige Dienst van de Rijkswaterstaat" in Delft durch Feinnivellements zu den unterirdischen Festlegungen überprüft. Die NAP-Höhen sind nicht schwerer reduziert. Die mittlere Meereshöhe an der niederländischen und deutschen Nordseeküste entspricht etwa dem Nullpunkt des Amsterdamer Pegels. Das fünfte Hauptnivellement ist in den Jahren 1996-1998 beobachtet worden. Niederländische Untersuchungen haben inzwischen ergeben, daß die Festlegung des NAP nicht stabil ist und mit etwa 5 cm bis 6 cm pro Jahrhundert sinkt (bzw. der mittlere Meeresspiegel steigt).

### Literaturhinweise:

Gedon 1995, Heyde 1923, Seeger 1993, Spata 1998, Waalewijn 1986, Zimmermann 1979

## **h)     Österreich**

Das normalorthometrische Höhensystem in Österreich bezieht sich auf das Mittelwasser der Adria am Pegel Molo Sartorio in Triest. Die Höhe der Referenzmarke war 1875 vom Militärgeographischen Institut (MGI) mit 3,352 m bestimmt worden. Nachfolgende mehrjährige Pegelbeobachtungen zeigten allerdings, daß wegen der Hebung des Adriameeresspiegels die Bezugshöhe heute um ca. 30 cm vom Mittelwasser abweicht. Als nationaler Höhenbezugspunkt dient der Haupthöhenpunkt Hutbiegl/Horn im Böhmenmassiv. Das 1. Präzisionsnivellement begann 1873 und zog sich mit mehreren Ergänzungsmessungen bis zum Zweiten Weltkrieg hin. Eine erste Erneuerung erfolgte 1947 bis 1963, eine zweite Erneuerung von 1966 bis 1985. Das künftige orthometrische Höhensystem beruht auf einer Neuausgleichung der zweiten Netzerneuerung mit Anschluß an das europäische Höhensystem UELN (siehe Abschnitt m) und somit indirekt an den Amsterdamer Pegel (NAP).

### Literaturhinweise:

Gedon 1995, Heyde 1923, Seeger 1993, Spata 1998, Zeger 1986

## **i)     Polen**

In Polen wurde 1974 bis 1979 das Hauptnivellement erneuert. Diese Messungen gingen in die gemeinsame Ausgleichung des osteuropäischen EPNN ein (siehe Abschnitt m). Durch den Anschluß an das EPNN besteht der Bezug zum Pegel Kronstadt. Die 1986 fertig berechneten Höhen sind Normalhöhen (Kronstadt 86).

### Literaturhinweise:

Gedon 1995, Seeger 1993, Spata 1998

## k) Schweiz

Als Ausgangspunkt für das 1865 bis 1887 von der Schweizerischen Geodätischen Kommission (SGK) durchgeführte Präzisionsnivellement der Schweiz wurde die Bronzemarke auf dem *Pierre du Niton*, einem Felsblock im Hafen von Genf, angehalten. Die Höhe von *Repère Pierre du Niton (RPN)* wurde 1902 mit 373,600 m über dem Mittelwasser des Hafens von Marseille festgelegt. Auch die Höhen des zwischen 1903 und 1933 erneuerten Landesnivellements (*LN02*) haben keine Schwerereduktionen. Inzwischen haben die Arbeiten für ein Landesnivellement (*LN95*) als wissenschaftliches Zweitsystem mit Anschluß an das europäische Höhenbezugssystem UELN (siehe Abschnitt m) und unter Berücksichtigung von Oberflächenschwerewerten begonnen.

### Literaturhinweise:

Gedon 1995, Gubler et al. 1996, Heyde 1923, Seeger 1993, Spata 1998

## l) Tschechien

Die letzten Erneuerungsmessungen wurden in Tschechien in den Jahren 1973 bis 1978 durch den Geodätischen Dienst in Prag ausgeführt. Auch das tschechische Netz ist Bestandteil des osteuropäischen EPNN (siehe Abschnitt m). Folglich sind die tschechischen Höhen ebenfalls angeschlossen an den Pegel Kronstadt und sind Normalhöhen.

### Literaturhinweise:

Gedon 1995, Seeger 1993, Spata 1998

## m) Europäische Höhensysteme

Bislang gibt es in Europa zwei weitreichende Höhensysteme. Im Osten besteht das *Einheitliche Präzisionsnivellement Osteuropäischer Länder (EPNN)*. Dieses Netz ist angeschlossen an den Pegel Kronstadt (Hafen der Insel Kotlin bei St. Petersburg) und in Normalhöhen nach Molodensky berechnet. Den Normalhöhen liegen Helmert-Normalschwereformeln mit Bezug zum Krassowski-Ellipsoid zugrunde. Es ist zugleich Grundlage der Höhennetze aller osteuropäischen Staaten (siehe Abschnitte b, i und l).

Im Westen existiert das Vereinigte Europäische Nivellementnetz (*United European Leveling Network (UELN)*), früher: Réseau Européen Unifié de Nivellement (REUN)). Es ist ein ursprünglich westeuropaweit einheitliches Hauptnivellementnetz und wurde 1954 aus Nivellementlinien 1. Ordnung der beteiligten nord-, west- und südeuropäischen Staaten gebildet und mehrfach ausgeglichen, so 1955, 1960, 1973 und 1986. Das UELN enthält mehrere Meerespiegel, sein Höhenbezugspunkt ist der Amsterdamer Pegel (NAP). Es ist nicht in metrischen Meereshöhen, sondern in geopotentiellen Koten berechnet.

Im Gegensatz zum EPNN ist das UELN kein Gebrauchshöhennetz, es hat bisher nur wissenschaftliche Zielsetzungen, u.a. den Vergleich der Mittelwasserstände an den europäischen Küsten. Jedoch setzt sich das Messungsmaterial aus einem Zeitraum von mehr als 70 Jahren (1912 bis 1984) zusammen. Es ist mit unterschiedlichen Reduktionsverfahren bearbeitet worden, so daß keine befriedigende Homogenität vorliegt. Folglich kann das UELN den heutigen Genauigkeitsansprüchen nicht genügen. Die UELN-Höhen fanden deshalb keinen Eingang in die Praxis der Landesvermessung, sie wurden nur für wissenschaftliche Zwecke verwendet. Lediglich einzelne UELN-Punkte dienen zum Anschluß für neue Höhensysteme, so z.B. der NivP Wallenhorst mit seiner UELN86-Kote zum Anschluß des neuen DHHN 92.

Seit 1994 laufen Arbeiten mit dem Ziel, das UELN auf die Länder Osteuropas zu erweitern, mit Hilfe von GPS-Messungen an europaweit verteilte Meerespiegel anzuschließen und dadurch eine bessere Homogenität des Netzes mit Dezimeter-Genauigkeit zu erzielen

(UELN 95). Die CERCO-Staaten sind grundsätzlich bereit, aufgrund der künftigen UELN-Ergebnisse einen mittleren Meereshorizont für ganz Europa festzulegen. Favorisiert wird die Beibehaltung des Amsterdamer Pegels und die Berechnung von Normalhöhen.

Literaturhinweise:

Gronwald 1963, Heyde 1923, Schödlbauer 1990, Spata 1998, Weber 1994

## 2.5 Verknüpfung der Lage- und Höhensysteme

Die nahezu 200jährige Geschichte der amtlichen Landesvermessung ist geprägt durch die grundsätzliche Trennung der Lage- und Höhensysteme. Aus meß- und rechentechnischen Gründen ist bisher die Bestimmung von Lagekoordinaten auf einer mathematisch eindeutig definierten Rechenfläche (Erdellipsoid, Bildkugel, Rechenebene) bewußt getrennt worden von der Bestimmung von Höhen in Bezug auf eine mehr oder weniger physikalisch festgelegte Bezugsfläche. Hierbei geht man von einem gewählten Höhennullpunkt aus, dessen Lage zum Festland an einem oder an mehreren Meerespegeln über einen längeren Zeitraum beobachtet wurde. Erst seit 1983 werden satellitennutzende Vermessungsverfahren (GPS-Messungen) in der Landesvermessung eingesetzt, die eine zentimetergenaue Koordinatenbestimmung der Erdoberflächenpunkte direkt in einem dreidimensionalen geozentrischen erdfesten System (z.B. WGS) gestatten.

Die Anwendung der herkömmlichen terrestrischen Vermessungsverfahren erfordert normalerweise keine tieferen Kenntnisse über die Bezugsflächen der Lage- und des Höhenpunktfeldes. Für die Höhenreduktion der terrestrischen Beobachtungen reicht es aus, die NN-Höhen  $H$  aller Meßpunkte mit Hilfe der rund dezimetergenauen NN-Undulationen in entsprechende ellipsoidische Höhen  $h$  umzurechnen. In Ermangelung exakter NN-Undulationen werden dazu Geoid-Undulationen graphisch einer Isoliniendarstellung der Geoidberechnungen nach Heitz oder Lelgemann oder Denker entnommen. Diese Werte betragen in Nordrhein-Westfalen maximal 1,7 m im Hochsauerland und sind nur bei den 2D-Berechnungen der TP-Netze 1. und 2. Ordnung berücksichtigt worden. Bei allen Folgeauswertungen werden die NN-Undulationen vernachlässigt.

Hingegen erfordert das Umsetzen von GPS-Ergebnissen vom originär dreidimensionalen System sowohl in das Lage- wie auch in das Höhensystem der Landesvermessung eine genaue Kenntnis der gegenseitigen Zuordnung der beiden Bezugsflächen und ihrer Lagerung im Raum. Hierbei sind die Undulationen ein unverzichtbares Bindeglied zwischen den Lage- und Höhensystemen. Zu jeder Verknüpfung eines Höhensystems mit einem Lagesystem gehört ein eigenständiges System von Undulationen.

Die Undulationen  $U$  einzelner Punkte lassen sich nicht direkt messen, sondern nur indirekt als Differenz zwischen der ellipsoidischen Höhe  $h$  und Landeshöhe  $H$  ableiten:

$$U = h - H.$$

Zur Vermeidung von Verwechslungen sind bei Undulationen stets das jeweilige Höhen- und Lagebezugssystem bzw. die zugehörigen Schlüsselzahlen des Höhenstatus mitanzugeben (siehe Anlage 8).

In Nordrhein-Westfalen werden für GPS-Auswertungen im System Netz 1977 die NN-Undulationen verwendet und im Nachweis der TP geführt:

$$U_{NN} = h_{\text{Bessel}} - H_{\text{DHHN12}}.$$

Für diesen Zweck wurde das mittels GPS-Messungen der Jahre 1983-85 bestimmte KONMAC-Netz einer dreidimensionalen Netzausgleichung mit Auffelderung auf Punkte an den drei Basen des Schreiberschen Blocks (3110 Meppen, 4425 Göttingen, 5208 Bonn) unterzogen. Die NN-Undulationen in diesen drei Basispunkten wurden dabei mit Null vorgegeben, weil für die zur Reduktion der Basisstrecken auf das Bessel-Ellipsoid benö-

tigten ellipsoidischen Höhen die damaligen NN-Höhen (altes NN-System) verwendet worden sind. Die Auffelderung erfolgte mittels einer 7-Parameter-Transformation (3 Translationen, 3 Rotationen, 1 Maßstab). Die Kenntnis anderweitiger gegenseitiger Lagerungen von Bezugssystemen ist nur über entsprechend verteilte Stützpunkte zu erlangen.

Für GPS-Auswertungen im neuen System ETRS 89 werden künftig NHN-Undulationen als Differenz ellipsoidischer Höhen des ETRS 89 und Normalhöhen des neuen Höhensystems DHHN 92 bestimmt:

$$U_{\text{NHN}} = h_{\text{GRS80}} - H_{\text{DHHN92}}$$

#### Literaturhinweise:

AdV 1989, Fröhlich et al. 1993, Günther 1986, Heck 1991, LVerMA NRW 1989a, LVerMA NRW 1990, Schmidt 1986 und 1991, Schödlbauer 1990, Spata 1998, Torge 1980a, Wolf 1987

## 2.6 Globale dreidimensionale Bezugssysteme

### a) World Geodetic System

Durch die ständig wachsende Nutzung satellitengeodätischer Meßmethoden sind auch im Vermessungswesen dreidimensionale geozentrische Bezugssysteme unabdingbar geworden. So wurden schon seit Mitte der siebziger Jahre Satellitendopplerbeobachtungen für geodätische Zwecke genutzt, insbesondere auch in der Grundlagenvermessung. Dadurch hielt das *World Geodetic System 1972 (WGS 72)*, auf welches sich zum damaligen Zeitraum die Ephemeridenbestimmung der Transit-Satelliten bezogen, Einzug in die Landesvermessung.

Seit 1987 ist das WGS 72 abgelöst durch das um ein verbessertes Gravitationsmodell sowie eine genauere Satellitenmeßtechnik verfeinerte *WGS 84*. Hierbei handelt es sich um ein globales dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem, das sich auf den Erdschwerpunkt (Geozentrum) bezieht. Die Z-Achse weist zum Nordpol in seiner als CTP (Conventional Terrestrial Pole) bezeichneten Lage. Die X-Achse ist die Schnittgerade der Ebene des WGS84-Bezugsmeridians und der CTP-Äquatorebene, wobei der Bezugsmeridian parallel zum Nullmeridian (Greenwich-Meridian) liegt. Die Y-Achse liegt ebenfalls in der CTP-Äquatorebene und zeigt rechtwinklig nach Osten. In diesem XYZ-Rechtssystem werden seit 1987 die Ephemeriden der GPS-Satelliten angegeben, wodurch auch sämtliche Koordinaten und Koordinatenunterschiede, die mit GPS-Meßtechnik bestimmt sind, originär auf diesem System basieren.

Im WGS 72 und im WGS 84 ist jeweils ein Bezugsellipsoid mit dem Erdschwerpunkt als Mittelpunkt definiert. Im Jahre 1980 wurde durch die Internationale Union für Geodäsie und Geophysik (IUGG) für zivile Anwendungen ein *Geodätisches Referenzsystem (GRS 80)* definiert. Das Ellipsoid des GRS 80 und das WGS-84-Ellipsoid stimmen in ihren Dimensionen praktisch überein (siehe Anlage 1).

Die Lage von Punkten im WGS bzw. GRS kann ausgedrückt werden durch

- geozentrische dreidimensionale Koordinaten X, Y, Z,
- geozentrische Polarkoordinaten,
- geographische Koordinaten Breite B, Länge L, ellipsoidische Höhe h,
- zweidimensionale kartesische Koordinaten in ebener Abbildung, z.B. in konformer Abbildung nach Gauß-Krüger oder UTM.

## b) KONMAC-Netz

Im Jahre 1983 wurde erstmals in Nordrhein-Westfalen das satellitennutzende Vermessungssystem Macrometer zur Bestimmung von Vermessungspunkten im TP-Feld eingesetzt. Da die Positionen der benutzten GPS-Satelliten im WGS 72 angegeben waren, lagen auch die dreidimensionalen Koordinatenergebnisse der Punktbestimmung in diesem System vor. Mehrere, zunächst unabhängig voneinander bestimmte Teilnetze wurden zum KONMAC-Netz zusammengefügt. Dieses frei ausgeglichene GPS-Netz wurde unter Beibehaltung seiner Orientierung und seines Maßstabs auf sieben Punkte der *Deutsch-Österreichischen Dopplerkampagne (DÖDOC 1977/79)* transformiert. Damit ist das WGS 72 durch das KONMAC-Netz realisiert. In Nordrhein-Westfalen wurden von 1983 bis 1992 rund 1830 TP im System WGS 72 zusätzlich zur Netz77-Berechnung bestimmt.

Als weitere gewisse Vorstufe des EUREF-Systems ist das *DÖNAV-Netz (Deutsch-Österreichische NAVSTAR-Kampagne)* zu nennen. Das Netz wurde 1986 mit TI-4100-Empfängern beobachtet und umfaßt in Anlehnung an das DÖDOC-Netz rund 50 Punkte auf dem Gebiet von Westdeutschland, Österreich und Dänemark. In NRW liegen die DÖDOC- bzw. DÖNAV-Punkte 4304 Fürstenberg und 4121 Köterberg. Die Ergebnisse im WGS 72 stehen noch aus, sie sind inzwischen durch das im WGS 84 bestimmte EUREF-Netz überholt.

## c) EUREF-System

Als Grundlage für die Ermittlung von dreidimensionalen Koordinaten dient im europäischen Raum das von der Internationalen Assoziation für Geodäsie (IAG) im *European Reference Frame (EUREF)* festgelegte geodätische Bezugssystem *European Terrestrial Reference System 1989 (ETRS 89)*. Dieses ETRS 89 stützt sich auf eine Anzahl weltweit mit astrogeodätischen Meßmethoden (Very Long Baseline Interferometry (VLBI), Satellite Laser Ranging (SLR) und Lunar Laser Ranging (LLR)) festgelegter Primärstationen und stimmt für den stabilen Teil der eurasischen Platte zum Zeitpunkt 1. Januar 1989 (1989.0) mit dem vom International Earth Rotation Service (IERS) in Paris geschaffenen weltweiten *International Terrestrial Reference System (ITRS)* überein. Aufgrund tektonischer Bewegungen erfahren alle Punktkoordinaten in Europa jährliche Veränderungen von etwa 3 cm bis 4 cm. Im übrigen stimmt das ETRS 89 mit dem hauptsächlich für Navigationszwecke verwendeten WGS 84 im Submeterbereich überein.

Das EUREF-Netz wurde im Mai 1989 im Anschluß an die Primärstationen durch hochgenaue GPS-Messungen geschaffen. Es besteht aus rund 90 Stationen in Westeuropa mit einem Abstand von etwa 200 bis 500 km. Die Ergebnisse wurden von der IAG-Subkommission "EUREF" 1992 veröffentlicht. In NRW liegen die vier EUREF-Punkte 4214 Soestwarte, 4304 Fürstenberg, 5306 Euskirchen und 5504 Weißerstein (siehe Anlage 9).

Die AdV beschloß im Mai 1991, das WGS 84 in der EUREF-Version (= ETRS 89) als künftiges Bezugssystem der Landesvermessung und des Liegenschaftskatasters einzuführen. Für das Gebiet der wiedervereinigten Bundesrepublik Deutschland wurde bereits im April 1991 das EUREF-Netz durch ein GPS-Grundnetz, das *Deutsche Referenznetz (DREF)*, verdichtet. Die 109 DREF-Punkte mit einem durchschnittlichen Punktabstand von 50 km bis 80 km bilden die 1. Verdichtungsstufe des Referenzpunktfeldes. Auf NRW entfallen neben den vier EUREF-Punkten die fünf DREF-Punkte 4121 Köterberg, 4816 Altastenberg, 4908 Burscheid, 5002 Gangelt, 5308 Bad Godesberg (siehe Anlage 9).

Das im Herbst 1993 eingeschaltete *Nordrhein-Westfälische Referenznetz (NWREF)* besteht aus 113 neu vermarkten Punkten. Sie haben einen durchschnittlichen Punktabstand von etwa 15 km bis 25 km und bilden die 2. Verdichtungsstufe. Zusammen mit den EUREF- und DREF-Punkten dienen diese NWREF-Punkte als Hauptanschlußpunkte (Referenzpunkte) für alle weiteren 3D-koordinierten Folgemessungen zur Bestimmung von ETRS-Koordinaten (siehe Anlage 10).

Seit 1996 ist in Nordrhein-Westfalen ein Netz von aktiven Referenzstationen im Aufbau.

Diese Permanentstationen des bundesweiten *Satellitenpositionierungsdienstes der deutschen Landesvermessung (SAPOS)* begründen eine moderne und äußerst wirtschaftliche Methode für Positionierung und Navigation. In mehreren Stufen, die sich durch die Art der Daten-übertragung, durch die Zeitdauer bis zur Bereitstellung der GPS-Korrekturen und durch die erzielbare Genauigkeit unterscheiden, unterstützt SAPOS Anwendungen, die von der behördlichen Vermessungspraxis bis in den Alltag aller Bürger reichen können, wie z.B. die Fahrzeugnavigation.

Zur Berechnung von geographischen Koordinaten und ellipsoidischen Höhen dient das WGS84-Ellipsoid (= GRS80-Ellipsoid). Die AdV hat im Mai 1995 die Einführung des neuen Bezugssystems ETRS 89 bekräftigt und die UTM-Abbildung für alle Bereiche der Landesvermessung und des Liegenschaftskatasters beschlossen. In Nordrhein-Westfalen werden die Basisinformationssysteme ALB, ALK, ALKIS und ATKIS zunächst im bisherigen System Netz 1977 aufgestellt und erst danach landesweit geschlossen auf ETRS 89 und UTM umgestellt.

Die 3D- und 2D-Koordinaten eines speziellen WGS-Systems sind untereinander gleichartig; sie lassen sich mathematisch streng ineinander umrechnen. Hingegen sind die Koordinaten des WGS 72 ungleichartig zu denen des WGS 84 bzw. ETRS 89 sowie die WGS-Systeme ungleichartig zu den Systemen DHDN und EAGN 1942/xx oder den ED-Systemen.

Literaturhinweise:

AdV 1989, 1991 a und b, Elsner 1997, Elsner et al. 1997, Hankemeier 1997, Heck 1991, IAG 1992, Lindstrot 1990 und 1996, Lindstrot et al. 1992, Pelzer 1985, Schmidt 1986, 1992 und 1995, Seeber 1988 und 1996, Seeger 1995, Spata/Kühnhold 1994, Spata/Lindstrot 1995.

### 3 Umrechnung gleichartiger Lage- und Höhensysteme

#### 3.1 Umrechnung gleichartiger Höhen

Nach Vorgabe einer bestimmten Höhenbezugsfläche (z.B. eine Niveaulfläche oder ein Geoid) lassen sich folgende gleichartige Höhensysteme eindeutig ineinander umrechnen:

- geopotentielle Koten  $C$ ,
- dynamische Höhen  $H_D$ ,
- Normalhöhen  $H_N = C/\gamma_m$ .

Die geopotentielle Kote

$$C_i = \sum g \cdot dh$$

mit	$dh$ (m)	= nivellierter Höhenunterschied über eine kleine Nivellementstrecke $ds$ ,
	$g$ (kGal)	= der für $ds$ geltende gemessene Schwerewert

ist als Potentialunterschied des Höhenpunktes  $P_i$  gegen den Ausgangspunkt  $P_0$  definiert; sie wird durch Nivellement und Schweremessung ermittelt. In Nordrhein-Westfalen wird für  $g$  in der Regel das Mittel aus gemessenen Schwerewerten am Anfangs- und Endpunkt von  $ds$  eingesetzt. Die Genauigkeit der geopotentiellen Koten ist abhängig von der Genauigkeit der Nivellement- und Schweremessungen.

Die geopotentielle Kote hat die Dimension Nm/kg, d.h. Arbeit pro Masseneinheit. Auf Beschluß der Internationalen Assoziation für Geodäsie (IAG) wird seit 1954 die Einheit  $1 \text{ kGal} \cdot \text{m} = 10 \text{ Nm/kg}$  benutzt, so daß der Zahlenwert von  $C$  wegen  $g \approx 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  nur rund 2 % kleiner ist als die metrische Höhe  $H$ :  $C \approx g \cdot H \approx 0,98 \cdot H$ .

Der Vorteil der geopotentiellen Koten liegt darin, daß sie als natürliches Maß für Höhen eines Punktes unabhängig vom Nivellementweg und hypothesenfrei sind. Die Werte  $C_i$  sind jedoch wegen ihrer ungünstigen nicht metrischen Einheit für die Zwecke der allgemeinen Landes- und Ingenieurvermessung ungeeignet, da zu ihrer Bestimmung neben der Nivellier- auch eine Gravimeterausrüstung benötigt wird.

In NRW sind bisher keine geopotentiellen Koten amtlich eingeführt worden. Lediglich im "Nivellementnetz 1960" der AdV und im DHHN85 wurden geopotentielle Koten berechnet; sie fanden aber keinen Eingang in den Nachweis der NivP. Im Höhensystem des DHHN 92 werden mit Anschluß an den Nivellementpunkt 3614 Wallenhorst für alle NivP(1) geopotentielle Koten berechnet, aus denen dann die amtlichen Normalhöhen (Höhenstatus 160) abgeleitet werden (siehe A2).

#### A1 Geopotentielle Kote $C$ <---> Dynamische Höhe $H_D$

Dividiert man nach einem Vorschlag von Helmert die geopotentiellen Koten  $C$  durch einen bestimmten Schwerewert  $g_0$ , so erhält man ein spezielles metrisches Höhensystem, die sogenannten *dynamischen Höhen*:  $H_D = C/g_0$ . Bei Verwendung einer vorgegebenen Normalschwere, z.B. in  $45^\circ$  Breite, erhält man die dynamischen Höhen  $H_D = C/\gamma_{45^\circ}$ . Zur besseren Anpassung kann auch ein von  $\gamma_{45^\circ}$  abweichender konstanter Wert benutzt werden, z.B. ein kontinentaler oder landesspezifischer Mittelwert.

Diese Höhen  $H_D$  sind widerspruchs- und hypothesenfrei, sie beziehen sich auf eine bestimmte Niveaulfläche und lassen sich einfach berechnen. Trotz der Einheit in Meter haben sie aber keine praktische Bedeutung erlangt. Sie weisen in Gebieten abseits von  $45^\circ$  Breite und in großen Höhenbereichen erhebliche Verzerrungen auf, weil durch die Division eines konstanten Wertes die polare Konvergenz der Niveaulflächen zu beträchtli-

chen dynamischen Weg-korrekturen zwingt. In NRW wurden bisher keine amtlichen  $H_D$ -Werte bestimmt.

## A2 Geopotentielle Kote C <---> Normalhöhe HN

Von großer Bedeutung für die Landesvermessung im Gebiet der ehemaligen DDR (und in allen anderen osteuropäischen Staaten sowie in Frankreich) ist das von Molodenski eingeführte System der *Normalhöhen*  $H_N$ . Sie werden in einem vorgegebenen Normalschwerefeld der Erde durch die geopotentielle Kote C und die mittlere Normalschwere  $\gamma_m$  definiert:

$$H_N = C/\gamma_m \quad \text{mit} \quad \gamma_m = (1/H_N) \int_0^{H_N} \gamma \cdot dH_N.$$

Der Wert  $\gamma_m$  ist das arithmetische Mittel aller  $\gamma$ -Werte längs des Lotes in  $P_i$  und kann mit hinreichender Genauigkeit als der Normalschwerewert in der halben Normalhöhe von  $P_i$  angesehen werden. Die Normalschwerewerte  $\gamma_m$  lassen sich bei einem vorgegebenen Normalschwerefeld (z.B. des Geodätischen Referenzsystems 1980 (GRS 80)) und einem beliebig vorgegebenen Höhenbezugspunkt mit bekannter Normalhöhe und -schwere streng (iterativ) berechnen. Trägt man die Normalhöhen von der Erdoberfläche aus nach unten ab, so ergibt sich das Quasigeoid als Höhenbezugsfläche; es stellt keine Niveaufläche dar. Das System der Normalhöhen besitzt viele Vorzüge, die auch dem geopotentiellen System eigen sind. In NRW werden erstmals amtliche Normalhöhen des Systems DHHN 92 eingeführt und in den Nachweis der NivP übernommen (siehe Abschnitt 2.4).

### Literaturhinweise:

AdV 1975 und 1991, Leismann et al. 1992, Torge 1975, Schneider 1960, Schödlbauer 1990, Wolf 1974.

## 3.2 Umrechnung gleichartiger Koordinaten (und Höhen)

Bei Vorgabe eines dreidimensionalen kartesischen geozentrischen Koordinatensystems (3D-System) und eines darin eingeschriebenen Bezugsellipsoids lassen sich folgende gleichartige Koordinatensysteme mathematisch eindeutig ineinander umrechnen:

- geozentrische kartesische dreidimensionale Koordinaten (Rechtssystem) X, Y, Z,
- räumliche Polarkoordinaten Breite  $B_0$ , Länge  $L_0$ , Radiusvektor R (Winkelangaben für B und L in Grad, Gon oder Radiant),
- ellipsoidisch-geographische Koordinaten Breite B und Länge L, ellips. Höhe h (Winkelangaben für B und L in Grad, Gon oder Radiant),
- konforme Koordinaten
  - \* Gauß-Krüger-Koordinaten R, H (3°-Meridianstreifen,  $m_0 = 1$ ),
  - \* Gauß-Krüger-Koordinaten R, H (6°-Meridianstreifen,  $m_0 = 1$ ),
  - \* UTM-Koordinaten E, N (6°-Meridianstreifen,  $m_0 = 0,9996$ ),
  - \* Stereographische Koordinaten y, x,
  - \* konische (Lambert-)Koordinaten y, x,
- ordinatentreue Koordinaten
  - \* Soldnersche Koordinaten y, x,
  - \* sphäroidische Koordinaten y, x.

Weder die 3D- noch die räumlichen Polarkoordinaten, noch die ellipsoidisch-geographischen Koordinaten sind geeignet, Punkte in ebenen Karten, Plänen und Rissen

unverzerrt darzustellen. Die für die Kartenherstellung notwendige Verebnung kann nach unterschiedlichen Abbildungsarten geschehen. Die Abbildungen vom Ellipsoid in die Ebene können winkel- oder flächentreu sein, in alle Richtungen längentreue Abbildungen sind nicht möglich. Für geodätische Aufgaben ist eine winkeltreue (konforme) Abbildung vorteilhaft.

### - **Zweidimensionale Umrechnungen**

B1	Gauß-Krüger (R, H) <sub>i</sub>	<--->	Gauß-Krüger (R, H) <sub>i+1</sub>
B2	Gauß-Krüger R, H	<--->	ellipsoidisch B, L
B3	Gauß-Krüger R, H	<--->	sphäroidisch y, x
B4	Gauß-Krüger R, H	<--->	stereographisch y, x
B5	Gauß-Krüger R, H	<--->	konisch (Lambert) y, x
B6	Gauß-Krüger R, H	<--->	UTM E, N
B7	UTM (E, N) <sub>i</sub>	<--->	UTM (E, N) <sub>i+1</sub>

Der Index i bezeichnet die Nummer des Abbildungsstreifens.

Zwischen den ebenen Koordinaten verschiedener Abbildungen und entsprechender benachbarter Meridianstreifensysteme und -zonen bestehen eindeutige mathematische Beziehungen, solange sie auf demselben geodätischen Datum beruhen. Den 2D-Umrechnungsprogrammen liegen in der Regel strenge Formeln einer Potenzreihenentwicklung zugrunde. Diese 2D-Umrechnungsgleichungen werden hier im einzelnen nicht dargelegt, dazu wird auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen.

Die früher bei der Umrechnung von Katasterkoordinaten in Gauß-Krüger-Koordinaten sowie von Koordinaten benachbarter Meridianstreifensysteme aus rechentechnischen Gründen betonte Unterscheidung zwischen Einzelpunktumrechnung (logarithmische und Maschinenrechnung nach Anweisung XI) und Massenumrechnungen (gruppenweise Umformung in Rechenquadranten nach Formeln von Schroeder-Kaestner-Meier) hat heute durch den Einsatz von EDV-Programmen keine Bedeutung mehr.

### - **Dreidimensionale Umrechnungen**

Einem vorgegebenen Bezugsellipsoid (z.B. WGS 84 bzw. GRS 80) mit den zwei geometrischen Parametern

a = große Halbachse,  
b = kleine Halbachse

sowie den Hilfsgrößen

$f = (a - b)/a$  = Abplattung,  
 $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$  = 1. numerische Exzentrizität,  
 $M = a(1 - e^2)/(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}$  = Meridiankrümmungsradius,  
 $N = a/(1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}$  = Querkrümmungsradius

können die folgenden zwei unterschiedlichen Koordinatensysteme zugeordnet werden:

- ellipsoidisches Koordinatensystem B, L, h mit  
     B = ellipsoidische (geographische) Breite,  
     L = ellipsoidische (geographische) Länge,  
     h = ellipsoidische Höhe,
- dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem X, Y, Z,  
     dessen Nullpunkt im Ellipsoidmittelpunkt O liegt,  
     dessen Z-Achse in Richtung des ellipsoidischen Nordpols,  
     dessen X-Achse in Richtung des ellipsoidischen Nullmeridians,  
     dessen Y-Achse rechtwinklig zur Z- und X-Achse nach Osten zeigt.

**B8**  $X, Y, Z \longleftrightarrow \text{ellipsoidisch } B, L, h$ 

Für die Umrechnung zwischen dem XYZ-System und dem BLh-System bestehen folgende Formeln:

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos B \cos L, \\ Y &= (N + h) \cos B \sin L, \\ Z &= ((1 - e^2) N + h) \sin B. \end{aligned}$$

Die Gleichungen für die Berechnung der kartesischen Koordinaten aus den ellipsoidischen sind geschlossen und streng. Für die Umkehrung dagegen besteht nur eine iterative Lösung:

$$\begin{aligned} L &= \arctan(Y/X), \\ B &= \arctan\{Z/(X^2 + Y^2)^{1/2}(1 - e^2 N/(N + h))^{-1}\}, \\ h &= (X^2 + Y^2)^{1/2} / \cos B - N. \end{aligned}$$

Der Wert  $h$  ist jeweils nach  $B$  zu berechnen. Da in der Regel  $h \ll N$ , konvergiert die Entwicklung sehr rasch. Um Genauigkeitseinbußen aufgrund der iterativen Berechnung zu vermeiden, sind zwei Schranken  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  (z.B.  $\varepsilon = 1 \text{ mm}$ ) für den Abbruch der Iterationen festzusetzen, so daß gilt

$$|B_i - B_{i-1}| \leq \varepsilon_1 \quad \text{und} \quad |h_i - h_{i-1}| \leq \varepsilon_2.$$

Lassen sich die räumlichen kartesischen Koordinaten  $X, Y, Z$  eines Geländepunktes generell streng in ellipsoidische Werte  $B, L, h$  umrechnen, so lassen sich die zweidimensionalen ellipsoidischen Koordinaten  $B$  und  $L$  ohne zusätzliche Kenntnis der ellipsoidischen Höhe  $h$  nicht in dreidimensionale Werte überführen. Dabei sei betont, daß die ellipsoidischen Höhen  $h$  keinerlei Bezug zum Schwerfeld der Erde oder zu einem der geläufigen Höhensysteme haben, anders als die sonstigen Höhen  $H$  der Landesvermessung (z.B. NN oder HN).

Hinsichtlich der Umrechnung der ellipsoidischen Koordinaten  $B$  und  $L$  in ebene konforme Koordinaten wird auf die Transformationsansätze B1 bis B7 verwiesen.

**B9**  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z \longleftrightarrow \Delta B, \Delta L, \Delta h$ 

Die differentiell kleinen Änderungen  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  der kartesischen Koordinaten im Punkt P, z.B. dreidimensionale Zentrierelemente, werden mit Hilfe einer orthogonalen Drehmatrix in differentiell kleine (in Meter ausgedrückte) Änderungen  $\Delta B, \Delta L, \Delta h$  ellipsoidischer Koordinaten umgerechnet. In Matrixschreibweise lauten die Änderungen:

$$\begin{vmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin B \cos L & -\sin L & \cos B \cos L \\ -\sin B \sin L & \cos L & \cos B \sin L \\ \cos B & 0 & \sin B \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (N + h) \Delta B \\ (N + h) \cos B \Delta L \\ \Delta h \end{vmatrix}$$

sowie in Umkehrung

$$\begin{vmatrix} (N + h) \Delta B \\ (N + h) \cos B \Delta L \\ \Delta h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin B \cos L & -\sin B \sin L & \cos B \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ \cos B \cos L & \cos B \sin L & \sin B \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{vmatrix}$$

mit den geographischen Koordinaten  $B$  und  $L$  sowie der ellipsoidischen Höhe  $h$  des Punktes P.

**B10    $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$    <--->   *Topozentrische Polarkoordinaten***

Sind die 3D-Koordinaten X, Y, Z zweier Vermessungspunkte P und Q bekannt, so lassen sich aus ihren Koordinatendifferenzen

$$\begin{aligned}\Delta X &= X_Q - X_P \\ \Delta Y &= Y_Q - Y_P \\ \Delta Z &= Z_Q - Z_P\end{aligned}$$

die topozentrischen Polarkoordinaten Azimut  $a_{P,Q}$ , Raumstrecke  $s_{P,Q}$  und Zenitwinkel  $z_{P,Q}$  mit den ellipsoidischen Koordinaten B und L des Pols P wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}a &= \arctan \{(-\Delta X \sin L + \Delta Y \cos L) / (-\Delta X \sin B \cos L - \Delta Y \sin B \sin L + \Delta Z \cos B)\}, \\ s &= (\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2)^{1/2}, \\ z &= \arccos \{(\Delta X \cos B \cos L + \Delta Y \cos B \sin L + \Delta Z \sin B) / s\}.\end{aligned}$$

Aus der Differenz zweier homogen berechneter Azimute kann der Horizontalwinkel (in einer Tangentialebene durch P)

$$W = a_2 - a_1$$

ermittelt werden.

Die Raumstrecke s ist unabhängig vom jeweiligen Koordinatensystem, sie ist systeminvariant. Hingegen sind das Azimut a und der Zenitwinkel z systemabhängig. Zur weiteren Auswertung der topozentrischen Polarkoordinaten sind die bekannten Korrekturen wegen Höhenlage des Topozentrums (Pol) über dem Ellipsoid zu berücksichtigen.

Eine direkte Umrechnung der topozentrischen Polarkoordinaten in 3D-Koordinaten ist nicht gefragt, wohl aber eine indirekte Umrechnung über ellipsoidische Koordinaten- und Höhendifferenzen (siehe Transformationsansatz B9).

Literaturhinweise:

Anweisung XI 1932, Bauer 1992, Ehlert 1991, Großmann 1976, Harbeck 1970, Heck 1995, Hristow 1943, Kaestner 1950a und b, Klotz 1993, Meier 1954 und 1955, Schödlbauer 1982 und 1984b, Schroeder 1935, Seeber 1989, Torge 1975, 1980b und 1985, Wolf 1963.

## 4 Umformung ungleichartiger Lage- und Höhensysteme

### 4.1 Allgemeines

Die Umformung von Koordinaten und Höhen kann als Abbildung einer Punktmenge  $M$  des Startsystems auf eine Punktmenge  $m$  des Zielsystems betrachtet werden. Für die Umformung werden Formeln angesetzt, deren Parameter entweder vorab bekannt sind oder aus einem Vergleich der alten und neuen Koordinaten und Höhen der Stützpunkte ermittelt werden. Die Transformationsansätze unterscheiden sich in der Anzahl der gewählten Parameter und ihrer geometrischen Bedeutung.

Jede Umformung setzt voraus, daß die Koordinatensysteme vergleichbar sind, d.h. gleiche Verzerrungsverhältnisse bestehen. Gegebenenfalls ist das Startsystem durch eine gleichartige Vortransformation dem Zielsystem anzunähern.

Bei der eindeutigen Lösung der Umformung entspricht die Anzahl der zu bestimmenden Transformationsparameter gerade der Anzahl der Stützpunktkoordinaten. Liegen mehr Stützpunktkoordinaten vor als zur eindeutigen Berechnung notwendig sind, werden die Parameter durch Ausgleichung so ermittelt, daß in der Regel die Quadratsumme der Restklaffungen in den Stützpunkten minimal wird. Diese Minimierung nach der Methode der kleinsten Quadrate (auch L2-Norm-Methode genannt) ist als Helmert-Transformation bekannt. Hierbei liefert jeder Stützpunkt pro Koordinate eine Verbesserungsgleichung. Mit den berechneten Transformationsparametern können dann die Koordinaten der Umformungspunkte (U-Punkte) vom Startsystem ins Zielsystem transformiert werden. Neben der Minimierung der L2-Norm gewinnen heute die L1-Norm-Lösung (Robuste Schätzer) zur Grobfehlersuche und die  $L^\infty$ -Norm-Lösung (Mini-Max-Methode) zur Minimierung der größten Restklaffung an Bedeutung.

Der wesentliche Vorteil einer eindeutigen Umformung besteht darin, daß keine Restklaffungen in den Stützpunkten vorkommen. Die Nachteile liegen darin, daß durch den Mangel an Überbestimmung keinerlei Fehlerwerte und statistische Tests zur Grobfehlersuche berechnet werden können. Will man auch bei Vorlage vieler Stützpunkte die überbestimmte Umformung vermeiden, ist das Umformungsgebiet in Stützpunktmaschen zu zerlegen. Für jede Masche werden die Transformationsparameter eindeutig bestimmt und sodann die innerhalb der Masche liegenden Umformungspunkte vom Startsystem ins Zielsystem umgeformt. Diese früher aus rechentechnischen Gründen bevorzugte eindeutige Umformung ist heute die Ausnahme. In der Regel werden alle Stützpunkte zur Berechnung der gewünschten Parameter mittels Ausgleichung genutzt (Helmert-Transformation). Die Vorteile der Helmert-Transformation bestehen in der Möglichkeit zur Berechnung von Restklaffungen. Hieraus können wiederum Genauigkeitsangaben und statistische Testgrößen zwecks Untersuchung der Lageidentität und der Netzhomogenität berechnet werden.

Die allgemeine Lösung der überbestimmten Umformung erlaubt ein individuelles Gewicht für jede Stützpunktkoordinate, z.B. abhängig von ihrem Koordinatenfehler. Es können theoretisch auch Stützpunkte mit einem höheren Gewicht versehen werden (z.B. seit ihrer Bestimmung zweifelsfrei unveränderte Punkte) gegenüber weniger sicher vermarkten Stützpunkten (z.B. wiederhergestellte oder mutmaßlich veränderte Punkte). Zur Transformation von GPS-bestimmten Koordinaten steht normalerweise die vollständige Varianz-Kovarianz-Matrix zur Verfügung. In den meisten Fällen setzt man jedoch die Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}$  der Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$  gleich, weil die ursprüngliche Bestimmungsgeometrie und -genauigkeit in der direkten Beobachtungsdarstellung verloren gegangen ist. Ebenso bleiben bei 2D-Transformationen in der Regel mathematische Korrelationen zwischen den Koordinaten unberücksichtigt, so daß  $\mathbf{P}$  eine Diagonalmatrix ist. Trotz  $\mathbf{P} = \mathbf{E}$  kann man das Gewicht von Stützpunkten dadurch erhöhen, daß man sie mehrfach in die Berechnung einführt, z.B. bei stark unregelmäßiger Verteilung der Stützpunkte.

Während die ebenen Umformungsansätze mit 3 und 5 Parametern zu nichtlinearen Verbesserungsgleichungen führen, sind die Lösungen der anderen, gleichgewichtigen Ansätze linear, d.h. die Normalgleichungen zerfallen in einzelne, voneinander unabhängige

Systeme. Mit Hilfe der Reduktion der Stützpunktkoordinaten auf ihren Schwerpunkt S können die linearen gleichgewichtigen Umformungsfälle auf einfache Weise ohne Verbesserungs- und Normalgleichungen gelöst werden. Hinsichtlich dieser speziellen Lösungen wird auf die Fachliteratur verwiesen.

Manche Umformung bewirkt eine mehr oder weniger stark ausgeprägte Störung ursprünglich bestehender geometrischer Bedingungen, wie z.B.

- Geradlinigkeit,
- Rechtwinkligkeit,
- Parallelität,
- Kreiskontinuität,
- Abstand.

Zur Wiederherstellung dieser geometrischen Beziehungen sind spezielle Verfahren der Ausgleichsrechnung anzuwenden. Dazu sind die einzelnen Beziehungen den vermessungstechnischen Unterlagen (Pläne, Risse oder Karten) zu entnehmen, dv-mäßig zu erfassen und in einem hybriden Ausgleichungsansatz (z.B. mit dem Programmsystem FLASH im ALK-GIAP) zwecks Ermittlung bedingungskonformer Koordinaten der U-Punkte auszuwerten.

So wichtig und teilweise unverzichtbar die Umformungen in der Landesvermessung auch sind, muß dennoch vor übertriebenen Erwartungen bei ihrer Anwendung gewarnt werden, denn

- jeder Umformungsansatz ist hinsichtlich der Wahl der Parameter und der Stützpunkte sowie der Behandlung der Restklaffungen mehr oder weniger willkürlich; nur eine Neuberechnung der Koordinaten mit den alten Meßelementen liefert plausible Ergebnisse und Fehlerwerte,
- Umformungen liefern keine punktbezogene Fehlermaße, so daß eine Beurteilung und Zuverlässigkeit der originären Messungen wie auch der transformierten Koordinaten nur bedingt möglich ist,
- Umformungen gestatten keine Überprüfung der Netzgeometrie, wohingegen Netzausgleichungen Konfigurationsdefekte aufdecken,
- bei Transformationen unterliegt die Dateneingabe für die Stütz- und U-Punkte keinerlei Kontrolle; die eingegebenen Daten sind deshalb besonders sorgfältig zu prüfen,
- Umformungen liefern keine optimalen nachbarschaftstreuen Lösungen, weil Netzspannungen im Startsystem nur insoweit im Zielsystem beseitigt werden können, wie dies durch die Wahl der Transformationsparameter und Stützpunkte ermöglicht wird; nur eine Netzausgleichung bewirkt eine Homogenisierung der Ausgangsdaten und somit ein optimales nachbarschaftstreuere Koordinatenergebnis (vorausgesetzt, alles ist zuverlässig kontrolliert),
- geometrische Nebenbedingungen können bei Transformationen nicht immer erhalten bleiben; sie sind nur in einem hybriden Ausgleichungsansatz mit entsprechender Genauigkeit einzuhalten.

Aus diesen Gründen soll nach Möglichkeit die Neuberechnung mit alten und/oder neuen Messungselementen gegenüber der Umformung bevorzugt werden (siehe VP-Erlaß).

Literaturhinweise:

Baumann 1988, Benning und Scholz 1990, Blachnitzky 1987, Haag 1981, Kampmann 1992, Kampmann et al. 1994, Schmitt et al. 1991, Wolf 1968 und 1975.

## 4.2 Umformung ungleichartiger Höhen

Zwischen den nachfolgend aufgeführten, gegenseitig ungleichartigen Höhensystemen besteht keine mathematische Eindeutigkeit, weil sie auf verschiedenen Beobachtungen beruhen, die mit Hilfe verschiedener Abbildungen (Höhenreduktionen und Bezugsflächen) berechnet sind (siehe Abschnitt 2.4):

Höhensystem	Höhenstatus
<b>- geopotentielle Koten</b>	
System DHHN 1960	420
System UELN 1986	400
System DHHN 1982	460
<b>- orthometrische Landeshöhen</b>	
Swinemünde (ab 1840)	130
„ (ab 1875)	131
Neufahrwasser (PrLA 1868-1875)	110
Hamburg (HH und SH vor 1875)	120
Normalnull (altes System 1879-1912)	150
„ (neues System nach 1912)	100
„ (DHHN 1960)	820
„ (DHHN 1985)	140
Amsterdam (NL 1940)	---
Ostende (B 1960)	---
<b>- Normalhöhen</b>	
Kronstadt (ehem. DDR SNN 1976)	150
Marseille (F 1969)	---
Amsterdam (DHHN 1992)	160
<b>- ellipsoidische Höhen</b>	
Bessel-Ellipsoid	300
GRS80-Ellipsoid	310

### C3 Dreiparametertransformation

Der allgemeine Fall einer Umformung von ungleichartigen Höhen wird durch einen Dreiparameteransatz gelöst. Hierbei werden neben einer Verschiebung zusätzlich noch zwei Kippungen, je eine pro Koordinatenachse des Lagesystems, angesetzt. Von einer Unterschiedlichkeit des Maßstabes (unterschiedliche Eichungen des Lattenmeters), die sich durch einen weiteren Parameter beschreiben ließe, wird dabei abgesehen:

$$H_{\text{Neu},i} = D + x_i \cdot \alpha + y_i \cdot \beta + H_{\text{Alt},i}$$

Hierbei sind

- $H_{\text{Neu}}$  = Höhen der Stützpunkte im Zielsystem,
- $H_{\text{Alt}}$  = Höhen der Stützpunkte im Startsystem,
- $i$  = 1, ..., n; n = Anzahl der Stützpunkte,
- $D$  = Verschiebungsparameter (Höhensystemunterschied),
- $\alpha, \beta$  = Kippungsparameter (Drehungen um Parallele zur y- und x-Achse),
- $x, y$  = Koordinaten der Stützpunkte in bezug auf einen vorgegebenen Drehpunkt S.

Bei mehr als 2 Stützpunkten ist die Umformung überbestimmt und durch Ausgleichung zu lösen. Die geometrischen Eigenschaften dieses Ansatzes sind kongruent (siehe Ansatz D3), weil das innere Gefüge der Höhen des Startsystems erhalten bleibt.

### C2 Zweiparametertransformation

Sind zwei Höhennetze (z.B. zweier benachbarter Staaten) zu verknüpfen, deren Eichungen auch unterschiedliche Lattenmeter aufweisen, so läßt sich außer einem konstanten Verschiebungsparameter auch noch ein Maßstabsparameter in Ansatz bringen:

$$H_{\text{Neu},i} = D + M_H \cdot H_{\text{Alt},i}$$

mit

- $D$  = Verschiebungsbetrag,
- $M_H$  = Maßstabsfaktor.

### C1 Einparametertransformation

In vielen Fällen wird zur Umformung ungleichartiger Höhen eine Einparametertransformation in Form von nur einer Verschiebung ausreichen (siehe auch Ansatz D1):

$$H_{\text{Neu},i} = D + H_{\text{Alt},i}$$

und  $D$  = Betrag der Höhenanpassung.

Literaturhinweise:  
Kremers 1990, LVerMA 1989b.

### 4.3 Umformung ungleichartiger 2D-Koordinaten

Gegenseitig ungleichartige Koordinaten liegen immer dann vor, wenn zwischen den jeweiligen Koordinatensystemen keine unmittelbare mathematische Beziehungen zueinander bestehen. Koordinaten sind gegenseitig ungleichartig, die aus verschiedenen Beobachtungen und inhomogenen Berechnungen entstammen, selbst wenn sie sich auf das gleiche Ellipsoid und die gleiche Abbildung beziehen. So sind z.B. die Gauß-Krüger-Koordinaten der nachfolgenden Lagesysteme des Bessel-Ellipsoids ungleichartig, weil sie durch verschiedene Punktbestimmungen ermittelt wurden (siehe Abschnitt 2.2a):

Lagesystem	Lagestatus
Preußische Landesaufnahme (PrLA.r.LA.)	101
NT Ruhrgebiet 1919/20	119
NT " 1931	131
NT Raum Köln 1933	133
NT Ruhrgebiet 1950/58	158
Flurbereinigungen Delbrück - Ostenland	163
NT Ruhrgebiet 1966	166
Vorl. NT im Reg.-Bez. Detmold 1972/74	173
Vorl. NT im Märkischen Kreis 1974/84	174
Vorl. NT im Raum linker Niederrhein 1972/76	175
Vorl. NT in der Übergangszone zu Nds 1977	176
NT Nordrhein-Westfalen 1977 ff (Netz 1977)	177

Der Übergang vom Startsystem zum Zielsystem ist beim Allgemeinfall einer ebenen Umformung durch sechs geometrische Operationen vollständig vollzogen:

- 2 Verschiebungen  $x_0, y_0$ ,
- 2 Drehwinkel  $e_x, e_y$ ,
- 2 Maßstabsfaktoren  $m_x, m_y$ .

Bei nicht überbestimmter Transformation werden dadurch die Figuren (z.B. Dreiecke) des Startsystems gerade so verschoben, verdreht und verzerrt, daß sie mit den entsprechenden Figuren des Zielsystems zur Deckung gebracht werden. Die 6 Transformationsparameter sind entweder vorab bekannt oder sie werden über Stützpunkte bestimmt.

Faßt man die Verschiebungsbeträge des Startsystems gegenüber dem Zielsystem in dem Translationsvektor

$$\mathbf{t}^T = [x_0, y_0],$$

die Achsdrehwinkel in der orthogonalen Rotationsmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} \cos e_x - \sin e_y & \\ \sin e_x + \cos e_y & \end{vmatrix}$$

und die Maßstabsfaktoren in der Maßstabsmatrix

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \end{vmatrix}$$

zusammen, lautet in Matrizenschreibweise die allgemeine Gleichung einer ebenen Umformung

$$\mathbf{x} = \mathbf{t} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}$$

Hierbei bezeichnen

$$\mathbf{x}^T = [x_i, y_i] \text{ und } \mathbf{X}^T = [X_i, Y_i]$$

die Koordinatenvektoren des Stützpunktes  $i$  im Zielsystem und im Startsystem. Die Werte der Maßstabsfaktoren liegen in der Regel bei Eins, so daß  $m = 1 + dm$  (mit  $dm < 15$  ppm) angesetzt werden kann.

Die einzelnen Transformationsansätze unterscheiden sich in der Anzahl der gewählten Parameter und in deren geometrischen Bedeutung:

Ansatz	Anzahl der Parameter	Name der Transformation	Transformationsgeometrie
—			
D1	1	---	$y_0$ oder $x_0$
D2	2	parallel	$y_0, x_0$
D3	3	kongruent	$y_0, x_0, e$
D4	4	ähnlich	$y_0, x_0, e, m$
D5	5	---	$y_0, x_0, e, m_y, m_x$
D6	6	affin	$y_0, x_0, e_y, e_x, m_y, m_x$

Die Transformationsgleichungen lassen sich eindeutig lösen, wenn die Anzahl der zu bestimmenden Parameter gleich ist der Anzahl der Stützpunktkoordinaten. Liegen mehr Stützpunktkoordinaten vor, sind die Parameter überbestimmt durch Ausgleichung (ebene Helmert-Transformation) zu ermitteln. Weitere Einzelheiten hierzu sind der einschlägigen Fachliteratur zu entnehmen.

## **D6            Sechsparametertransformation (Affinumformung)**

Aus dem langschriftlichen Gleichungspaar der Sechsparametertransformation

$$y_i = \sin e_x \cdot m_x \cdot X_i + \cos e_y \cdot m_y \cdot Y_i + y_0,$$

$$x_i = \cos e_x \cdot m_x \cdot X_i - \sin e_y \cdot m_y \cdot Y_i + x_0$$

erhält man über die allgemeinen Parameter

$$a_1 = \sin e_x \cdot m_x, \quad a_2 = \cos e_y \cdot m_y, \quad a_3 = y_0,$$

$$a_4 = \cos e_x \cdot m_x, \quad a_5 = -\sin e_y \cdot m_y, \quad a_6 = x_0,$$

die geometrischen Parameter, und zwar

$$2 \text{ Verschiebungen:} \quad y_0 = a_3, \quad x_0 = a_6,$$

$$2 \text{ Drehwinkel:} \quad e_y = \arctan(a_5/a_2), \quad e_x = \arctan(a_1/a_4),$$

$$2 \text{ Maßstabsfaktoren:} \quad m_y = (a_2^2 + a_5^2)^{1/2}, \quad m_x = (a_4^2 + a_1^2)^{1/2}.$$

Die 6 Parameter der Affinumformung lassen sich bei 3 Stützpunkten (= 6 Stützpunktkoordinaten) eindeutig berechnen, es treten keine Restklaffungen auf. Bei Anwendung einer maschenweisen Affinumformung wird das Stützpunktfeld in Dreiecksmaschen zerlegt. Sind mehr als 3 Stützpunkte bekannt, so ist die Umformung überbestimmt und die Parameter sind mittels Ausgleichung (Helmert-Transformation) zu ermitteln.

Die überbestimmte Affinumformung hat folgende geometrische Eigenschaften:

- a) Geradlinigkeit bleibt erhalten,
- b) Parallelität bleibt erhalten,
- c) Teilungsverhältnis in geraden Linien bleibt erhalten,
- d) Größenverhältnis von Flächen bleibt erhalten,
- e) Größen der Winkel ändern sich,
- f) Streckenlängen ändern sich,
- g) Quadrate werden in Parallelogramme abgebildet,
- h) Kreise werden in Ellipsen abgebildet.

**D5 Fünfparametertransformation**

Die 5 Parameter dieses Umformungsansatzes umfassen mit der Vereinfachung

$$e_y = e_x = e$$

folgende geometrische Operationen:

- 2 Translationen ( $y_0, x_0$ ),
- 1 Rotation ( $e$ ),
- 2 Maßstabsänderungen ( $m_y, m_x$ ).

Somit erhält man aus dem allgemeinen (affinen) Umformungsansatz das Gleichungspaar der Fünfparametertransformation:

$$y_i = \sin e \cdot m_x \cdot X_i + \cos e \cdot m_y \cdot Y_i + y_0,$$

$$x_i = \cos e \cdot m_x \cdot X_i - \sin e \cdot m_y \cdot Y_i + x_0.$$

Hieraus ergeben sich mit den allgemeinen Parametern

$$a_1 = \sin e \cdot m_x, \quad a_2 = \cos e \cdot m_y, \quad a_3 = y_0,$$

$$a_4 = \cos e \cdot m_x, \quad a_5 = -\sin e \cdot m_y, \quad a_6 = x_0$$

die ursprünglichen geometrischen Parameter, und zwar

$$2 \text{ Verschiebungen:} \quad y_0 = a_3, \quad x_0 = a_6,$$

$$1 \text{ Drehwinkel:} \quad e = \arctan(a_5 / a_2) = \arctan(a_1 / a_4),$$

$$2 \text{ Maßstabsfaktoren:} \quad m_y = (a_2^2 + a_5^2)^{1/2}, \quad m_x = (a_4^2 + a_1^2)^{1/2}.$$

Die 5 Parameter können bei 5 vorgegebenen Stützpunktkoordinaten (= 2 ½ Stützpunkte) eindeutig bestimmt werden. Liegen mehr Stützpunktkoordinaten vor, ist die Umformung überbestimmt und durch Ausgleichung zu lösen.

Die geometrischen Eigenschaften der Fünfparametertransformation entsprechen denen der Affinumformung (D6), der Winkel zwischen der x- und der y-Achse bleibt jedoch erhalten.

#### **D4 Vierparametertransformation (Ähnlichkeitsumformung)**

Mit den Vereinfachungen

$$e_y = e_x = e \quad \text{und} \quad m_y = m_x = m$$

beschreiben die 4 Parameter der Ähnlichkeitsumformung folgende geometrische Operationen:

- 2 Translationen ( $y_0, x_0$ ),
- 1 Rotation ( $e$ ),
- 1 Maßstabsänderung ( $m$ ).

Damit lautet das Gleichungspaar der Ähnlichkeitsumformung:

$$y_i = \sin e \cdot m \cdot X_i + \cos e \cdot m \cdot Y_i + y_0,$$

$$x_i = \cos e \cdot m \cdot X_i - \sin e \cdot m \cdot Y_i + x_0.$$

Die ursprünglichen geometrischen Parameter bilden die allgemeinen Parameter

$$a_1 = \sin e \cdot m, \quad a_2 = \cos e \cdot m, \quad a_3 = y_0,$$

$$a_4 = \cos e \cdot m, \quad a_5 = -\sin e \cdot m, \quad a_6 = x_0$$

mit den Identitäten

$$a_1 = -a_5 = 0 \quad \text{und} \quad a_2 = a_4 = a:$$

$$2 \text{ Verschiebungen:} \quad y_0 = a_3, \quad x_0 = a_6,$$

$$1 \text{ Drehwinkel:} \quad e = \arctan(a_1/a_2),$$

$$1 \text{ Maßstabsfaktor:} \quad m = (a^2 + a^2)^{1/2}.$$

Die Ähnlichkeitsumformung ist bei 2 Stützpunkten (= 4 Stützpunktkoordinaten) eindeutig bestimmt. Diese eindeutige Berechnung, bei der das Stützpunktfeld in einzelne Rechenachsen zerlegt wird, die durch zwei Stützpunkte festgelegt werden, ist heute nicht mehr zu empfehlen. Liegen mehr Stützpunkte vor, ergibt sich die Lösung mittels Ausgleichung. Dieser Lösungsansatz wurde erstmals von F.R. Helmert 1893 verwendet, seitdem wird diese Umformung auch als Helmert-Transformation bezeichnet. Heute steht diese Bezeichnung für jede Form der überbestimmten Transformation.

Die Ähnlichkeitsumformung hat folgende geometrische Eigenschaften:

- a) bis d) wie bei der Affinuumformung (D6),
- e) Winkelgrößen bleiben erhalten,
- f) Streckenlängen ändern sich proportional,
- g) Quadrate werden in Quadrate abgebildet,
- h) Kreise werden in Kreise abgebildet.

Somit bewirkt dieser Umformungsansatz keine Änderung des inneren Gefüges des Startsystems beim Übergang in das Zielsystem, woraus eben auch die Bezeichnung Ähnlichkeits- (bzw. konforme oder winkeltreue) Umformung resultiert.

### **D3            Dreiparametertransformation (Kongruenzumformung)**

Mit den Identitäten

$$e_y = e_x = e \quad \text{und} \quad m_y = m_x = 1$$

ergibt sich das Gleichungspaar der kongruenten Umformung:

$$y_i = \sin e \cdot X_i + \cos e \cdot Y_i + y_o,$$

$$x_i = \cos e \cdot X_i - \sin e \cdot Y_i + x_o.$$

Über die allgemeinen Parameter

$$a_1 = \sin e, \quad a_2 = \cos e, \quad a_3 = y_o,$$

$$a_4 = \cos e, \quad a_5 = -\sin e, \quad a_6 = x_o,$$

und die Identitäten  $a_1 = -a_5 = o_k$  und  $a_2 = a_4 = a_k$  verbleiben die ursprünglichen geometrischen Parameter:

$$2 \text{ Verschiebungen:} \quad y_o = a_3, \quad x_o = a_6,$$

$$1 \text{ Drehwinkel:} \quad e = \arctan(o_k/a_k).$$

Die 3 Parameter der kongruenten Umformung sind bei (theoretisch) 3 vorgegebenen Stützpunktkoordinaten (= 1 ½ Stützpunkten) eindeutig bestimmt; liegen mehr Stützpunktkoordinaten vor, ist die Lösung überbestimmt.

Die geometrischen Eigenschaften sind folgende:

- a) bis c) wie bei der Sechsparametertransformation (D6),
- d) Flächengrößen bleiben erhalten,
- e) Winkelgrößen bleiben erhalten,
- f) Streckenlängen bleiben erhalten,
- g) Quadrate werden in gleiche Quadrate abgebildet,
- h) Kreise werden in gleiche Kreise abgebildet.

Es bleiben also bei diesem Umformungsansatz alle Figuren in ihrer Form und Größe erhalten, sie werden lediglich in ihrer Lage verschoben und verdreht. Deshalb wird dieser Ansatz auch als kongruent bezeichnet.

## **D2            Zweiparametertransformation**

Die Vereinfachungen

$$e_y = e_x = 0 \quad \text{und} \quad m_y = m_x = 1$$

ergeben die allgemeinen Parameter

$$a_1 = a_5 = 0, \quad a_2 = a_4 = 1, \quad a_3 = y_0, \quad a_6 = x_0$$

und damit das Gleichungspaar der Zweiparametertransformation:

$$y_i = Y_i + y_0,$$

$$x_i = X_i + x_0.$$

Es verbleiben die zwei ursprünglichen geometrischen Parameter der Translation:

$$y_0 = a_3 \quad \text{und} \quad x_0 = a_6.$$

Eine Zweiparametertransformation kann auch die Vorgabe bzw. Bestimmung je zwei anderer Parameter beinhalten, z.B.  $e$  und  $m$ . Die geometrischen Eigenschaften entsprechen denen der kongruenten Umformung (D3).

## **D1            Einparametertransformation**

Dieser Transformationsansatz entspricht dem der Zweiparametertransformation (D2), wobei lediglich 1 Translationsparameter,  $y_0$  oder  $x_0$ , berechnet oder vorgegeben wird (siehe auch Ansatz C1). Das Gleichungspaar der Einparametertransformation lautet entsprechend vereinfacht:

$$y_i = Y_i \quad \text{und} \quad x_i = X_i + x_0$$

$$\text{oder} \quad y_i = Y_i + y_0 \quad \text{und} \quad x_i = X_i.$$

Die Einparametertransformation kann auch mit einem anderen Parameter vorgenommen werden, z.B. nur mit  $e$  oder  $m$ . Die geometrischen Eigenschaften entsprechen denen der kongruenten Umformung (D2).

### Literaturhinweise:

Baumann 1988, Blachnitzky 1987, Haag 1981, Kampmann et al. 1994, LVerMA 1987b, Schmidt 1960a, Wiens 1986, Wolf 1968 und 1975

#### 4.4 Umformung ungleichartiger 3D-Koordinaten

In Nordrhein-Westfalen werden derzeit folgende gegenseitig ungleichartige 3D-Koordinatensysteme (siehe Abschnitt 2.2a und 2.4) unterschieden:

3D-System	3D-Status
Netz 77 (DHDN)	377
WGS 72 (KONMAC)	372
ETRS 89 (EUREF)	389

Dreidimensionale kartesische Koordinaten ungleichartiger Systeme aller Art lassen sich ineinander umformen, wenn im Allgemeinfall einer räumlichen Affintransformation 9 Transformationsparameter vorab bekannt oder über Stützpunkte (durch Ausgleichung) ermittelt werden, und zwar

3 Verschiebungen  $X_o, Y_o, Z_o$ ,  
 3 Drehwinkel  $e_y, e_x, e_z$ ,  
 3 Maßstabsfaktoren  $m_y, m_x, m_z$ .

Faßt man die Verschiebungsbeträge des Startsystems gegenüber dem Zielsystem in dem Translationsvektor

$$\mathbf{t}^T = [X_o, Y_o, Z_o],$$

die Achsdrehwinkel in der orthogonalen Rotationsmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} \cos e_y \cdot \cos e_z & \cos e_x \cdot \sin e_z + \sin e_x \cdot \sin e_y \cdot \cos e_z & \sin e_x \cdot \sin e_z - \cos e_x \cdot \sin e_y \cdot \cos e_z \\ -\cos e_y \cdot \sin e_z & \cos e_x \cdot \cos e_z - \sin e_x \cdot \sin e_y \cdot \sin e_z & \sin e_x \cdot \cos e_z + \cos e_x \cdot \sin e_y \cdot \sin e_z \\ \sin e_y & -\sin e_x \cdot \cos e_y & \cos e_x \cdot \cos e_y \end{vmatrix}$$

und die Maßstabsfaktoren in der Maßstabsmatrix

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & m_z \end{vmatrix}$$

zusammen, lautet in Matrizenschreibweise die allgemeine Gleichung einer räumlichen Umformung:

$$\mathbf{x} = \mathbf{t} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}.$$

Hierbei bezeichnen

$$\mathbf{x}^T = [x_i, y_i, z_i] \quad \text{und} \quad \mathbf{X}^T = [X_i, Y_i, Z_i]$$

die Koordinatenvektoren des Stützpunktes  $i$  im Zielsystem und im Startsystem. Die Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  gilt für ein Rechtssystem, wobei bei einer Blickrichtung von außen entlang der Drehachse auf den Koordinatennullpunkt eine Drehung im Uhrzeigersinn positiv ist.

In der Praxis treten häufig folgende Vereinfachungen der allgemein gültigen Transformationsformeln auf:

- Sind die Achsen verschiedener geozentrischer Systeme bereits genähert parallel, d.h. nehmen die Drehwinkel  $e$  sehr kleine Werte an ( $e < 1$  mgon), vereinfacht sich die Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  mit  $\cos e \approx 1$ ,  $\sin e \approx e$  (in Bogenmaß) und  $\sin e \cdot \sin e \approx 0$  zu:

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} 1 & ez & -ey \\ -ez & 1 & ex \\ ey & -ex & 1 \end{vmatrix}$$

- Da der Maßstabsfaktor  $m$  gewöhnlich einen Wert bei Eins annimmt, kann er mit  $m = 1 + dm$  angesetzt werden. Desweiteren werden in der Regel einheitliche Maßstabsverhältnisse mit  $m_x = m_y = m_z = m$  angenommen.

- Betrachtet man nur die differentiell kleinen Änderungen der Koordinaten, so gilt

$$\begin{vmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -Z & Y \\ Z & 0 & -X \\ -Y & X & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{vmatrix}$$

Die einzelnen Transformationsansätze unterscheiden sich in der Anzahl der gewählten Parameter und ihrer geometrischen Bedeutung:

Ansatz	Anzahl der Parameter	Transformationsgeometrie
E3	3	3 Verschiebungen $X_0, Y_0, Z_0$
E4a	4	3 Verschiebungen $X_0, Y_0, Z_0$ , 1 Maßstabsfaktor $m$
E4b	4	3 Drehungen $e_x, e_y, e_z$ , 1 Maßstabsfaktor $m$
E6	6	3 Verschiebungen $X_0, Y_0, Z_0$ , 3 Drehungen $e_x, e_y, e_z$
E7	7	3 Verschiebungen $X_0, Y_0, Z_0$ , 3 Drehungen $e_x, e_y, e_z$ , 1 Maßstabsfaktor $m$
E9	9	3 Verschiebungen $X_0, Y_0, Z_0$ , 3 Drehungen $e_x, e_y, e_z$ , 3 Maßstabsfaktoren $m_x, m_y, m_z$ .

Die Transformationsgleichungen lassen sich eindeutig lösen, wenn die Anzahl der zu bestimmenden Parameter gleich ist der Anzahl der Stützpunktkoordinaten. Liegen mehr Stützpunktkoordinaten vor, sind die Parameter überbestimmt durch Ausgleichung (räumliche Helmert-Transformation) zu ermitteln. Bei 3D-Netzen mit relativ geringer Gebietsausdehnung sind die ermittelten Transformationsparameter häufig sehr stark miteinander korreliert und wenig signifikant. Im Extremfall können diese Korrelationen sogar dazu führen, daß das Normalgleichungssystem nicht mehr lösbar ist. Ggfl. ist mit einem einfacheren Transformationsmodell, z.B. einer Parallelverschiebung, die Berechnung zu wiederholen. Weitere Einzelheiten hierzu sind aus der einschlägigen Fachliteratur zu ersehen.

**E9 Räumliche Neunparametertransformation**

Auf die Wiederholung der praktisch unbedeutenden Transformationsformel wird verzichtet (s. o.).

**E7 Räumliche Siebenparametertransformation  
(Räumliche Ähnlichkeitstransformation)**

In der Regel werden bei 3D-Umformungen mit

$$m_x = m_y = m_z = m$$

homogene Maßstabsverhältnisse in allen drei Achsenrichtungen angenommen. Die Zuordnung von zwei kartesischen dreidimensionalen Koordinatensystemen geschieht dann durch eine räumliche Ähnlichkeitstransformation mit 7 Parametern. Die Umformungsgleichung lautet:

$$\mathbf{x} = \mathbf{t} + m (\mathbf{X} \bullet \mathbf{R}).$$

Die geometrischen Eigenschaften entsprechen denen der ebenen Ähnlichkeitstransformation (Ansatz D6).

**E6 Räumliche Sechsparametertransformation  
(Räumliche Kongruenztransformation)**

Mit der Vereinfachung  $m = 1$  ergibt sich aus dem Allgemeinfeld der räumlichen Transformation die Gleichung der räumlichen Kongruenztransformation (3 Translationen und 3 Rotationen):

$$\mathbf{x} = \mathbf{t} + (\mathbf{X} \bullet \mathbf{R}).$$

Die geometrischen Eigenschaften entsprechen denen der ebenen Kongruenztransformation (Ansatz D3). Form und Größe ( $m = 1$ ) des Netzes bleiben erhalten.

## **E4 Räumliche Vierparametertransformation**

### **Fall a:**

Mit der Forderung nach Achsparallelität zwischen dem Start- und Zielsystem ( $e_x = e_y = e_z = 0$ ) verbleiben 4 Parameter für 3 Verschiebungen und 1 Maßstabsfaktor. Somit beträgt die Transformationsgleichung:

$$\mathbf{x} = \mathbf{t} + \mathbf{X} \bullet \mathbf{m}.$$

Die Achsparallelität ist insbesondere dann zu fordern, wenn innerhalb eines Bezugssystems nur die Lagerung und der Maßstab geändert werden. Die geometrischen Eigenschaften sind vergleichbar mit denen einer ebenen Ähnlichkeitstransformation (Ansatz D4).

### **Fall b:**

Bei Wegfall der Translationen verbleiben für die 4 Parameter 3 Drehungen und 1 Maßstabsfaktor. Die Transformationsgleichung lautet:

$$\mathbf{x} = \mathbf{m} (\mathbf{X} \bullet \mathbf{R}).$$

Die geometrischen Eigenschaften sind vergleichbar mit denen im Fall a. Der Ansatz ist insbesondere in den Fällen zu benutzen, wenn die Start- und Zielsysteme denselben Koordinatennullpunkt haben. In bestimmten Sonderfällen wird nur 1 Drehung um die Z-Achse gewünscht, so daß  $e_x = e_y = 0$  gesetzt wird; es bleiben dann nur zwei Parameter übrig.

Eine Hauptanwendung besteht bei der Umformung mit 4 Parametern von 3D-Zentrierbeträgen vom Startsystem (z.B. DHDN) in das Zielsystem (z.B. ETRS 89). Eine weitere Anwendung besteht bei der Umformung eines mittels Satellitenmessung bestimmten Raumvektors von einem 3D-Startsystem (z.B. WGS 72) mit 3 oder mehr Drehparametern in ein 3D-Zielsystem (z.B. ETRS 89).

## **E3 Räumliche Dreiparametertransformation (Datumsverschiebung)**

Bei Wegfall der Rotationen und der Maßstabsänderung verbleiben nur 3 Verschiebungsparameter. Somit ergibt sich für diesen speziellen Fall einer Datumsverschiebung folgende einfache Transformationsgleichung:

$$\mathbf{x} = \mathbf{t} + \mathbf{X}.$$

Dieser Ansatz bewirkt keinerlei Änderung des inneren Gefüges des Startsystems, und die Achsparallelität der betreffenden Koordinatenachsen im Start- und Zielsystem bleibt erhalten. Insbesondere für begrenzte Umformungsgebiete und bei geringen Genauigkeitsansprüchen genügt oft eine reine Translation.

In der amerikanischen Fachliteratur wird der Ansatz als *datum shift* bezeichnet.

### Literaturhinweise:

Bauer 1992, Ehler 1991, Schmitt et al. 1991, Schödlbauer 1984a und b, Seeber 1989, Torge 1985

#### 4.5 Verkettete Transformationen

Durch eine verkettete Transformation können mehrere Punktfelder unterschiedlicher Startsysteme, die nebeneinander bzw. teilweise oder ganz übereinander liegen, mit Hilfe von Verknüpfungspunkten in ein gemeinsames einheitliches Zielsystem überführt werden. Die Transformationsparameter für die Umformungsansätze der einzelnen Startsysteme werden in einer gemeinsamen Ausgleichung unter Berücksichtigung der Identitätsbedingungen bei den Verknüpfungspunkten ermittelt.

Ein wesentlicher Vorteil bei der Anwendung von verketteten Transformationen liegt darin, daß die Anzahl der Verknüpfungspunkte insgesamt geringer sein kann als die Zahl aller Stützpunkte, die für die separaten Transformationen nötig wären. Trotz dieses Einsparungseffektes ist zu beachten, daß mit wachsender Anzahl der Verknüpfungspunkte die verkettete Transformation stabilisiert und gegen grobe Fehler sensibilisiert wird. Nachteilig sind die auftretenden unterschiedlichen Restklaffungen in den Verknüpfungspunkten, die mehreren Startsystemen angehören. Zur Wahrung der Nachbarschaftstreue in den jeweiligen Systemen müssen diese Restklaffungen systemweise verteilt werden. Sind die Startsysteme auch über Umformungspunkte miteinander verknüpft, so erhalten diese Punkte entsprechende Mehrfachkoordinaten, die in der Regel durch Mittelung zu einheitlichen sind.

Die verkettete Transformation gewinnt an Bedeutung bei der freien Stationierung und bei GPS-Multisessionslösungen. Hinsichtlich der Handhabung der verketteten Transformation wird auf das 7. Zahlenbeispiel im Teil II verwiesen (Zusammenschluß von photogrammetrischen Modellen).

Literaturhinweise:

Haag 1981, Gründig et al. 1981, Kraus 1966, Schmitt et al. 1991, Wiens 1986, Wolf 1968 und 1975

#### 4.6 Transformationen höherer Ordnung

Bei Vorhandensein einer großen Zahl von Stützpunkten können Transformationen höherer Ordnung verwendet werden, die auf einem Polynomansatz beruhen. Dabei werden gebietsweise systematische Verformungen der Restklaffungen auftreten, die von der Ordnung des Polynomansatzes abhängen.

Für die Durchführung der Transformation wird letztlich die Ordnung des Polynomansatzes zu wählen sein, die das plausibelste Ergebnis hervorbringt. Im allgemeinen kommen Transformationen höherer Ordnung für Zwecke der praktischen Landesvermessung nicht in Frage.

Jedoch könnten konforme Transformationen höherer Ordnung bei der zweidimensionalen Zusammenführung von GPS-Netzen mit bisherigen Lagenetzen künftig eine Rolle spielen.

Literaturhinweise:

Blachnitzky 1987, Förster 1931, Haag 1981, Schmitt et al. 1991, Wolf 1968 und 1975

#### 4.7 Methoden zur Restklaffungsbeseitigung

Nach der überbestimmten Umformung des Startsystems in das Zielsystem (Helmert-Transformation) treten an den Stützpunkten Restklaffungen auf. Da die Sollkoordinaten der Stützpunkte im Zielsystem regelmäßig anzuhalten sind, müssen die Restklaffungen auf die benachbarten Umformungspunkte so verteilt werden, daß die Nachbarschaftstreue im Zielsystem erhalten bleibt. Die Nachbarschaftstreue bedeutet eine spannungsfreie Koordinatenbestimmung unter Berücksichtigung des Nachbarschaftsprinzips. Bei Umformungen versteht man darunter vereinfacht die Wahrung der Abstandsverhältnisse zwischen je zwei Punkten im Start- und Zielsystem.

Durch die Verteilung der Restklaffungen erhält jeder Umformungspunkt einen Anpassungsbetrag in Form eines Koordinatenzuschlages in Richtung jeder Koordinatenachse. Bei der Berechnung der Anpassungsbeträge sind die Restklaffungen in allen Stützpunkten zu berücksichtigen, wobei allerdings der Einfluß der vom Umformungspunkt weiter entfernten Stützpunkte geringer als der Einfluß der nahe zum Umformungspunkt gelegenen Stützpunkte sein soll. Zur Vermeidung unerwünschter Extrapolationseffekte sollte außerhalb des Stützpunktrahmens keine Restklaffungsverteilung vorgenommen werden.

In der Fachliteratur werden folgende Methoden zur Restklaffungsbeseitigung behandelt:

- Verteilung nach Abstandsgewichten mit Hilfe des arithmetischen Mittels,
- Verteilung mit Hilfe der multiquadratischen Interpolation,
- Verteilung mit Hilfe der Sektorenmethode,
- Verteilung mittels Prädiktion.

Bei schlechter Qualität des Zielsystems oder bei nur geringen Restklaffungsbeträgen besteht auch die Möglichkeit, die transformierten Koordinaten der Umformungspunkte unverändert zu lassen, wenn die Abstände der Punkte dies erlauben. In der Vermessungspraxis haben sich folgende Methoden zur Restklaffungsbeseitigung bewährt:

##### ***F1 Verteilung nach Abstandsgewichten mit Hilfe des arithmetischen Mittels***

Zur Berechnung des Anpassungsbetrages  $u_j$  eines Umformungspunktes (U-Punktes)  $j$  mit Hilfe des gewogenen arithmetischen Mittels werden die Restklaffungen sämtlicher Stützpunkte berücksichtigt, wobei die Gewichtsansätze auf den Abständen zwischen den Stützpunkten und dem jeweiligen U-Punkt beruhen:

$$u_j = \frac{\sum_{i=1}^n p_i v_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \quad \text{mit} \quad p_i = s_{ij}^{-k}.$$

Hierin bedeuten

- $u_j$  = Anpassungsbetrag des U-Punktes  $j$ ,
- $p_i$  = Abstandsgewicht des Stützpunktes  $i$ ,
- $v_i$  = Restklaffung im Stützpunkt  $i$ ,
- $s_{ij}$  = Strecke zwischen dem Stützpunkt  $i$  und dem U-Punkt  $j$ ,
- $i = 1, \dots, n$ ;  $n$  = Anzahl der Stützpunkte,
- $j = 1, \dots, m$ ;  $m$  = Anzahl der U-Punkte
- $k = 1 \text{ oder } 1,5 \text{ oder } 2$ .

Der Wert  $u_j$  muß für jede einzelne Koordinate der Umformungspunkte gesondert berechnet werden. Der Wert  $k$  ist eine sinnvoll zu wählende Konstante. Je größer  $k$  ist, um so mehr geht der Einfluß entsprechend entfernter Stützpunkte zurück. Mit  $k = 1$  wurde dieses

Verfahren in der Preußischen Landestriangulation erstmals 1895 beim Thüringischen Dreiecksnetz in Vorschlag gebracht.

Eine unregelmäßige Verteilung der Stützpunkte bezüglich eines U-Punktes verzerrt den Wert für  $u$ . Dies gilt insbesondere dann, wenn einzelnen Stützpunkten Stützpunkthaufen gegenüberliegen. Bedingt durch den Rechenansatz liefert jeder Stützpunkt des Punkthaufens für sich einen Anteil an  $u$  und es kommt dadurch insgesamt ein verzerrtes Ergebnis zustande. Dieser Mangel kann aber leicht durch eine Wiederholung (Mehrfachansatz) der einzeln liegenden Stützpunkte oder durch die Anwendung der multiquadratischen Interpolation (F2) gemindert werden.

## **F2 Verteilung mit Hilfe der Multiquadratischen Interpolation**

Die Methode der multiquadratischen Interpolation basiert auf der Grundlage, daß jede glatte, aber unregelmäßige Fläche durch die Summe vieler kleiner, regelmäßiger (mathematisch definierbarer) Flächen angenähert werden kann. Der Verlauf dieser regelmäßigen Flächen wird bestimmt mit allen Stützpunkten (Anzahl =  $n$ ), ausgedrückt in einer endlichen Reihe. Die Interpolationsfläche ergibt sich somit durch Überlagerung von  $n$  Flächen 2. Grades (Hyperboloiden), daher der Name "multiquadratisch". Zwischen den Stützpunkten wird eine plausible Interpolation durchgeführt, unabhängig von der Stützpunktdichte und deren Verteilung.

Die Berechnungsformel für die Anpassungsbeträge  $u$  lautet in Matrizenschreibweise:

$$u = \mathbf{s}^T \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{v}.$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{s}$  den Abstandsvektor des U-Punktes  $j$ ,  $\mathbf{S}$  die Stützpunktmatrix und  $\mathbf{v}$  den Restklaffungsvektor mit

$$\mathbf{s}^T = [s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jn}]$$

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{v}^T = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

sowie mit

- $s_{ji}$  = Strecken zwischen dem U-Punkt  $j$  und den Stützpunkten  $i$ ,
- $S_{ik}$  = Strecken zwischen den Stützpunkten  $i$  und  $k$ ;  $S_{ii} = S_{kk} = 0$ ,
- $v_i$  = Restklaffungen in den Stützpunkten  $i$ ,
- $i, k = 1, \dots, n$ ;  $n$  = Anzahl der Stützpunkte,
- $j = 1, \dots, m$ ;  $m$  = Anzahl der U-Punkte.

Die Streckenwerte  $s_{ji}$  und  $S_{ik}$  können ggfl. um eine Glättungskonstante  $G$  erhöht werden. Je größer der Wert  $G$  gewählt wird, desto mehr nähert sich die Interpolationsfläche einer Ebene. Nähert sich der U-Punkt einem Stützpunkt, erhält er dessen Restklaffungsbetrag.

Der Wert  $u_j$  muß für jede einzelne Koordinate gesondert berechnet werden. Jedoch vereinfacht sich der gesamte Rechenumfang erheblich, da das Produkt  $\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{v}$  nur einmal vorab berechnet werden muß. Werden die Strecken  $s_{ji}$  und  $S_{ik}$  durch die entsprechenden Kovarianzwerte  $q_{ji}$  bzw.  $Q_{ik}$  ersetzt (wobei  $Q_{ii} \neq 0$ ), so ergeben sich die Formeln für die Verteilung der  $v$  mittels Kollokation.

Die multiquadratische Interpolation wurde erstmals 1971 von R.L. Hardy praktiziert.

### Literaturhinweise:

Blachnitzky 1987, Haag 1981, Hardy 1972, Overhoff 1984, Pr. La. 1895, Stückmann 1986, Wiens 1986, Wolf 1968, 1975 und 1981

## 5 Fehlerrechnung und statistischer Test

### 5.1 Allgemeines

Die Beurteilung eines Umformungsergebnisses umfaßt die Kontrolle sowohl der Genauigkeit wie auch der Zuverlässigkeit des Stützpunktfeldes. Beides ist nur bei überbestimmter (Helmert-) Transformation möglich. Die allgemeine Genauigkeit läßt sich durch die Berechnung von Standardabweichungen aus den Restklaffungen in den Stützpunkten abschätzen.

Ein als genau ausgewiesenes Stützpunktfeld muß aber nicht unbedingt zuverlässig sein. In nur schwach überbestimmten Umformungen können grobe Fehler in den Stützpunktkoordinaten unentdeckt bleiben und sich auf die ausgeglichenen Transformationsparameter auswirken, ohne daß diese Auswirkungen in den Genauigkeitsmaßen entsprechend erkennbar werden. Hierbei können grobe Fehler verursacht sein sowohl durch grob fehlerhafte Ausgangswerte, mangelnde Punktidentitäten, wie auch durch fehlerhafte Dateneingabe. Neben den Genauigkeitsmaßen sind also auch Zuverlässigkeitsmaße zu ermitteln, mit deren Hilfe das Risiko vermindert wird, daß unerkannte Mängel der Stützpunktgeometrie verbleiben.

Bei der Beurteilung von Umformungsergebnissen ist zu beachten, daß es sich bei den Genauigkeits- und Zuverlässigkeitsmaßen nur um statistische Kriterien handelt. Ihre Beurteilung kann nicht automatisch im Ablauf eines Rechenprogramms erfolgen, sondern erfordert den Sachverstand des Auswerter.

### 5.2 Fehlerrechnung

Die Gesamtredundanz  $R$  der Helmert-Transformation ist bestimmt durch

$$R = c \cdot n - u = \sum r_i$$

mit  $c = 1$  oder  $2$  oder  $3$  = Anzahl der Koordinatenachsen des Start bzw. Zielsystems,  
 $n$  = Anzahl der Stützpunkte,  
 $u$  = Anzahl der Transformationsparameter, wobei  $c \cdot n > u$ ,  
 $r_i$  = Redundanzanteil der einzelnen Koordinate des Stützpunktes  $i$ ,  
 $i = 1, \dots, n$ .

Die Restklaffungen im Stützpunkt  $i$  betragen

$$v_i = d_i - d'_i$$

mit  $d_i$  = Sollwert der einzelnen Koordinate des Stützpunktes  $i$  im Zielsystem,  
 $d'_i$  = transformierte Koordinate des Stützpunktes  $i$ .

Damit berechnet sich die Standardabweichung der Gewichtseinheit

$$s_0 = (\sum v_i^2 / R)^{1/2} = s_y = s_x = \dots \quad \text{mit } R = 2n - u$$

wobei die  $v^2$ -Summe alle vorkommenden (gleichgewichtigen) Restklaffungen beinhaltet, also z.B.  $\sum v_{yi}^2 + \sum v_{xi}^2$  usw. Zur Kontrolle muß jeweils gelten:  $\sum v_i = 0$ ! Der Wert  $s_0$  bezeichnet nur die durchschnittliche Lagegenauigkeit aller Stützpunkte in bezug auf nur eine Koordinate des Start- bzw. Zielsystems.

Hieraus wird mit

$$s_p = s_o \sqrt{c}$$

ein durchschnittlicher Punktlagefehler bestimmt. Diese pauschalen Punktfelder haben nur eine beschränkte Aussagekraft, sie sagen nichts über die Nachbarschaftstreue einzelner Punkte aus.

Die Standardabweichungen der Transformationsparameter  $a_k$  ( $k = 1, \dots, 9$ ) betragen

$$s_{ak} = s_o \sqrt{Q_{aak}}$$

mit  $Q_{aak}$  = Kofaktoren der Parameter  $a_k$ .

Generell läßt sich sagen, daß die Q-Werte desto kleiner (günstiger) werden, je mehr Stützpunkte vorhanden sind und je dichter diese verteilt sind. Bei nicht gleichgewichteten Umformungsansatz sind die Fehlermaße unter Berücksichtigung der betreffenden Gewichtungsfaktoren zu ermitteln.

Die Restklaffungen bei dreidimensionalen kartesischen Koordinaten lassen sich zur anschaulicheren Interpretation in entsprechende Lage- und Höhenanteile  $v_y$ ,  $v_x$ ,  $v_h$  transformieren:

$$\begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin B \cos L & \sin B \sin L & -\cos B \\ \sin L & -\cos L & 0 \\ -\cos B \cos L & -\cos B \sin L & -\sin B \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix}$$

Aus den Werten  $\sum (v_x^2 + v_y^2)$  berechnet sich ein mittlerer Lagefehler sowie aus  $\sum v_h^2$  ein mittlerer Höhenfehler.

#### Literaturhinweise:

Baumann 1988, Blachnitzky 1987, Wolf 1966, 1968 und 1975

### 5.3 Statistischer Test

Zur Signifikanzprüfung ausgeglichener Transformationsparameter, zur Lokalisierung möglicherweise vorhandener grober Fehler (Ausreißer) in den Stützpunktkoordinaten sowie als Entscheidungshilfe darüber, ob derartige Stützpunkte zur Bestimmung der Transformationsparameter heranzuziehen oder abzulehnen sind, dienen statistische Testverfahren. Die Aussagen des Tests unterliegen dabei der frei vorgebbaren Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ , wobei in der Regel mit  $\alpha = 5 \%$ ,  $1 \%$  oder  $0,1 \%$  gerechnet wird.

#### - Signifikanztest der Transformationsparameter

Die Werte der ausgeglichenen Transformationsparameter  $a_k$  können durch einen Einzeltest (t-Test) auf Signifikanz geprüft werden. Der Parameter  $a_k$  (bzw. der Unbekanntenzuschlag  $da_k$ ) gilt dann als signifikant von Null verschieden, wenn die Prüfgröße

$$t = a_k / s_{ak}$$

mit  $s_{ak}$  = Standardabweichung aposteriori des Parameters  $a_k$  größer ist als der zugehörige Fraktilwert  $t_s = t(1-\alpha, n-u)$ . Hierbei bezeichnen  $1-\alpha$  das statistische Sicherheitsniveau und  $n-u$  die Zahl der Freiheitsgrade der betreffenden Ausgleichung. Die Fraktilwerte sind den bekannten Tabellen zu entnehmen. Als Faustregel kann gelten: Je größer die Testgröße  $t$  ( $>2$ ), desto signifikanter der Parameter  $a$ . Ergeben sich nichtsignifikante Parameter, ist ggfl. die Transformation mit entsprechend geänderter Parameteranzahl zu wiederholen.

### - Statistischer Test nach Baarda (data snooping)

Die Testgröße nach Baarda beruht auf den Verbesserungen einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate (heute auch L2-Norm-Methode genannt). Die sogenannte Normierte Verbesserung (NV) lautet bei gleichgewichtetem Ansatz:

$$NV_i = |v_i| / s_{v_i} = |v_i| / (s_0 \sqrt{r_i})$$

mit  $|v_i|$  = Restklaffungsbetrag einer L2-Norm-Lösung, getrennt für jede einzelne Koordinate

des Stützpunktes  $i$ ,

$s_{v_i}$  = Standardabweichung der Restklaffung  $v_i$ ,

$s_0$  = Standardabweichung der Gewichtseinheit apriori,

$r_i$  = Redundanzanteil der Restklaffung  $v_i$ ,

$i$  = 1,...,n und n = Anzahl der Stützpunkte.

Der Wert  $NV_i$  ist für jede einzelne Stützpunktcoordinate gesondert zu berechnen. Mit der gewählten Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  ist für den Test ein Grenzwert  $G$  (Fraktilwert) festgelegt, z.B.  $G = 3,3$  bzw.  $2,6$  bzw.  $2,0$  für  $\alpha = 0,1$  % bzw.  $1$  % bzw.  $5$  %. Falls der Wert  $NV$  den Grenzwert  $G$  überschreitet, wird mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit  $1-\alpha$  vermutet, daß die betreffende Stützpunktcoordinate grob falsch ist. Dabei setzt der Baarda-Test voraus, daß theoretisch nur ein grober Fehler im Datenmaterial existiert. Treten mehrere Überschreitungen von  $G$  auf, sind die Berechnungen (Ausgleichung und Test) nach einer Grobfehlerbereinigung zu wiederholen. Dabei sind Reihenfolgen zu beachten, d.h. erst wird Fehler 1 bereinigt mit Beibehaltung von Fehler 2, dann 2 mit Beibehaltung von 1, falls eine gegenseitige Beeinflussung der groben Fehler aufgrund der Verschmierungseffekte der Methode der kleinsten Quadrate nicht auszuschließen sind. Diese Vorgehensweise bedingt eine erfahrungsgemäß hohe Anzahl von Rechenläufen.

Die Suche nach grob falschen Koordinaten und ihre Bereinigung wird dadurch erleichtert, daß der vermutliche Betrag des groben Fehlers (GF) abgeschätzt wird:

$$GF_i = -v_i / r_i.$$

Dadurch können bei ausreichender Redundanz vor allem Erfassungsfehler behoben werden. Bei schwachen Redundanz, d.h. bei wenigen überzähligen Stützpunkten, sind grobe Koordinatenfehler nur schwer aufzudecken. Wurden die Stützpunktkoordinaten individuell gewichtet, ist zu berücksichtigen, daß ungenaue Stützpunktkoordinaten stets durch genauere Koordinaten kontrolliert werden, aber nicht umgekehrt. Mit anderen Worten: kleine grobe Fehler mit hoher Redundanz sind leichter (zuverlässiger) aufzudecken als größere grobe Fehler mit geringer Redundanz.

Die Suche nach grob falschen Stützpunktkoordinaten gestaltet sich in den Randbereichen des Stützpunktfeldes schwieriger als innerhalb desselben. In Randbereichen kann die Redundanz so gering sein, daß grobe Fehler nur schwer zu erkennen sind. Deshalb sollten zur Beurteilung der Stützpunktidentitäten neben dem statistischen Test die Restklaffungen auch in einem Vektorplan graphisch dargestellt und analysiert werden.

### - Statistischer Test nach Pope

Der statistische Test nach Pope unterscheidet sich von dem nach Baarda darin, daß für  $s_0$  nicht die Standardabweichung apriori, sondern die Standardabweichung aposteriori benutzt wird, wie sie sich aus den Restklaffungen einer Helmert-Transformation ergibt. Die zugehörigen Werte  $G$  für die verschiedenen  $\alpha$ -Werte liefern die Tabellen von Pope. Der statistische Test nach Pope hat bisher in nordrhein-westfälischen Rechenprogrammen keinen Eingang gefunden, weil L2-Norm-Verschmierungen nicht ausgeschlossen werden können.

### - Statistischer Test der L1-Norm

In den letzten Jahren sind sogenannte robuste Schätzverfahren (Lp-Schätzer) zur Ausreißersuche entwickelt worden. Mit dem Begriff der Robustheit verbindet man den Schutz der Ausgleichungsergebnisse vor Ausreißern, d.h. der robuste Schätzer liefert auch dann noch zuverlässige Ergebnisse, wenn die Stützpunktkoordinaten einen oder mehrere (bis zur Anzahl der Überbestimmungen) Ausreißer enthalten.

Vor allem die L1-Norm-Methode mit der Zielfunktion Minimierung der Summe der Verbesserungsbeträge zeichnet sich durch ein besonders hohes Maß an Robustheit aus. Gegenseitige Verschmierungen der Verbesserungen, wie sie typisch sind für die L2-Norm-Methode, treten hier nicht auf. Daher eignet sie sich bei theoretisch nur einem Berechnungsablauf sehr gut zur Ausreißersuche.

Der Ausreißertest der L1-Norm berechnet analog zum Baarda-Test normierte Verbesserungen

$$T_i = |v_i| / s_{vi} = |v_i| / (s_o \sqrt{q_{ii}})$$

mit  $|v_i|$  = Restklaffungsbetrag einer L1-Norm-Lösung, getrennt für jede einzelne Koordinate des Stützpunktes  $i$ ,  
 $s_{vi}$  = Standardabweichung der Restklaffung  $v_i$ ,  
 $s_o$  = Standardabweichung der Gewichtseinheit apriori,  
 $q_{ii}$  = zugehöriger Kofaktor,  
 $i$  = 1,...,n und n = Anzahl der Stützpunkte.

Da die L1-Restklaffungen asymptotisch normalverteilt sind, können die Testwerte  $T_i$  mit den zugehörigen Grenzwerten  $G(\alpha)$  verglichen werden. Die Grenzwerte entsprechen denen des Baarda-Tests, also ebenfalls  $G = 3,3$  bzw.  $2,6$  bzw.  $2,0$  für  $\alpha = 0,1\%$  bzw.  $1\%$  bzw.  $5\%$ . Überschreitet der Testwert  $T_i$  den Grenzwert  $G$ , ist mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit  $1-\alpha$  zu vermuten, daß die betreffende Stützpunktkoordinate grob falsch ist. Das Zahlenmaterial ist zu untersuchen und ggfl. zu bereinigen, wobei der Restklaffungsbetrag bereits dem Betrag des vermuteten groben Fehlers entspricht.

Wegen fehlender mathematischer Eindeutigkeit der Lösung eignet sich die L1-Norm-Methode nicht zur Bestimmung der unbekannten Parameter. Deshalb ist die abschließende Ausgleichung weiterhin der L2-Norm mit ihrer hohen Effizienz (minimale Fehlerwerte der Ergebnisse) vorbehalten. Der robuste L1-Schätzer ergänzt die L2-Norm zur schnellen Ausreißersuche, er kann sie nicht ersetzen.

Der robuste L1-Schätzer ist 1993 in das Transformationsmodul des nordrhein-westfälischen ALK-Vorverarbeitungsprogramms DIVA integriert worden.

#### Literaturhinweise:

Baumann 1988, Blachnitzky 1987, Förstner 1979, Kampmann 1986, 1991 und et al. 1994, Koch 1987, Pope 1976, Wiens 1986

## Literatur

### Abkürzungen:

AVN	Allgemeine Vermessungs-Nachrichten
DGK	Deutsche Geodätische Kommission
DVW	Deutscher Verein für Vermessungswesen
NÖV	Nachrichten aus dem öffentlichen Vermessungswesen in Nordrhein-Westfalen
VI	Der Vermessungsingenieur
VR	Vermessungswesen und Raumordnung
VT	Vermessungstechnik
ZfV	Zeitschrift für Vermessungswesen

Ahrer, H.: AREF-1 - Das GPS-Grundnetz von Österreich als Basis der modernen telematischen Geodäsie. In: IX. Internationale Geodätische Woche Obergurgl 1997, Institut für Geodäsie der Universität Innsbruck, Heft 17, Innsbruck 1997, S. 177-178.

Anweisung XI: Anweisung vom 11. März 1932 für die Umformung geographischer, sphäroidischer und konformer Koordinaten. Preußisches Finanzministerium, Katasterverwaltung, Berlin 1932.

Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Länder der Bundesrepublik Deutschland (Adv): Nivellementnetz 1960. Bayerisches Landesvermessungsamt, München 1975.

- : Richtlinien für GPS-Messungen in der Landesvermessung (GPS-Richtl.). Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen, Bonn-Bad Godesberg 1989.
- : Niederschrift zur 88. Tagung des Adv-Plenums im Mai 1991 in Saarbrücken. Niedersächsisches Landesverwaltungsamt, Hannover 1991a.
- : Richtlinien für einen TP-Erlaß. Hessisches Landesvermessungsamt, Wiesbaden 1991b.
- : Die Wiederholungsmessungen 1980 bis 1985 im Deutschen Haupthöhennetz und das Haupthöhennetz 1985 der Bundesrepublik Deutschland. Bayrisches Landesvermessungsamt, München 1993.

Bauer, M.: Vermessung und Ortung mit Satelliten - Eine Einführung in die Praxis. Zweite Auflage, Karlsruhe 1992.

Baumann, E.: Vermessungskunde, Band 2: Punktbestimmung nach Höhe und Lage. Zweite Auflage, Bonn 1988.

Benning, W. und Scholz, T.: Modell und Realisierung der Kartenhomogenisierung mit Hilfe strenger Ausgleichungstechniken. ZfV, 115. Jg., 1990, S. 45-55.

Blachnitzky, K.: Koordinatenumformung, Teil 1: Grundlagen. Ausbildungsvortrag Nr. 20, Bayerisches Landesvermessungsamt, München 1987.

Danske Geodaetiske Institut (DGI): Geodaetisk Institut Kort (Maps of Denmark). Kopenhagen 1979.

Ehlert, D.: Differentielle Verschiebungen und Drehstreckungen in dreidimensionalen Koordinatensystemen. DGK Reihe B Nr. 295, Frankfurt am Main 1991.

Ehnsperger, W.: Das Europäische Datum 1987 (ED 87). ZfV, 116. Jg., 1991, S. 45-59 und 301.

Elsner, C.: SAPOS-Aktivitäten des Landes Nordrhein-Westfalen. AVN, 104. Jg., 1997, S. 253-255.

Elsner, C./Gerdau, K./Kell, K.: Leistungsfähigkeit des Hochpräzisen Echtzeit-Positionierungs-Service (HEPS) des Satellitenpositionierungsdienstes der deutschen Landesvermessung (SAPOS). VR, 59. Jg., 1997, S. 157-170.

Eidgenössische Landestopographie: Geschichtliche Angaben über die geodätische Landesvermessung und die Kartenwerke in der Schweiz. Wabern 1976.

- : Schweizerisches Projektionssystem - Formeln für die Umrechnung von Landeskoordinaten Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen

in Geographische Koordinaten und umgekehrt. Wabern 1984.

Eyschen, A.: Die alten und neuen Katastermessungen im Großherzogtum Luxemburg. Bulletin de documentation du Ministre d'Etat, Nr. 12, 1963; Nachdruck durch Ministerium des Innern Rheinland-Pfalz, Mainz 1965.

Fédération Internationale des Géomètres (FIG): Fachwörterbuch - Benennungen und Definitionen im deutschen Vermessungswesen. Vorläufige Ausgabe zum XIII. Internationalen Kongreß der FIG in Wiesbaden 1971, Institut für Angewandte Geodäsie, Frankfurt am Main 1971.

Förster, G.: Zusammenschluß von zwei selbständigen Triangulierungen mit einzelnen identischen Punkten. ZfV, 56.Jg., 1931, S. 639-667.

Förstner, W.: Das Programm TRINA zur Ausgleichung und Gütebeurteilung geodätischer Lagenetze. ZfV, 104. Jg., 1979, S. 61-72.

Fröhlich, H./Galitzki, B./Lindstrot, W.: NN-Undulationen oder Geoidundulationen? Ein Beitrag zur Höhenbestimmung mit GPS. AVN, 100. Jg., 1993, S. 213-223.

Gedon, R.: Höhensysteme und Nivellements der Nachbarstaaten Deutschlands. In: AdV (Herausg.): Deutsches Haupthöhennetz 1992. Druck: Bayerisches Landesvermessungsamt, München 1995, S. 39-56.

Gigas, E.: Die Universale Transversale Merkatorprojektion. VR, 24. Jg., 1962, S. 329-334.

Gronwald, W.: Das "Einheitliche Europäische Nivellementnetz" und der "Mittlere Meeresspiegel". ZfV, 88. Jg., 1963, S. 141-153.

Großmann, W.: Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung. 3. Auflage, Stuttgart 1976.

Gründig, L. und Klumpp, R.: Ausgleichung von Messungslinien durch eine verkettete Ähnlichkeitstransformation mit Maßstabsfaktoren. Mitteilung des DVW-Landesvereins Baden-Württemberg, 28.Jg. 1981.

Gubler, E./Gutknecht, D./Marti, U./Schneider, T./Signer, T./Vogel, B./Wiget, A.: Die neue Landesvermessung der Schweiz LV95. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, 1996, S. 47-65.

Günther, G.: Koordinatensysteme in Nordrhein-Westfalen. VI, 28. Jg., 1977, S. 2-6.

-: Freie Ausgleichung des KONMAC-Netzes durch das Landesvermessungsamt NRW. In: DGK, Heft Nr. 282, 1986, S. 33-46.

Haag, K.: Die Transformation ungleichartiger Koordinaten. Sonderheft Nr. 13 der Hessischen Kataster- und Vermessungsverwaltung (KVV-Informationen), Hessisches Landesvermessungsamt, Wiesbaden 1981.

Hankemeier, P.: SAPOS - Der Satellitenpositionierungsdienst der deutschen Landesvermessung. AVN, 104. Jg., 1997, S. 237-242.

Harbeck, R.: Zur Umformung gleichartiger und ungleichartiger Koordinaten in Nordrhein-Westfalen. Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen, Münster 1970.

Hardy, R.L.: Geodetic applications of multiquadric analysis. AVN, 1972, S. 398-404.

Heck, B.: Referenzsysteme. In: GPS und Integration von GPS in bestehende geodätische Netze, Sonderheft DVW-Landesverein Baden-Württemberg, 38. Jg., 1991, S. 90-124.

: Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung. 2. Aufl., Heidelberg 1995.

Heyde, H.: Die Höhennullpunkte der amtlichen Kartenwerke der europäischen Staaten und ihre Lage zu Normal-Null. Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin, Heft 3-4, Berlin 1923, S. 147-150 (Sonderheft des Büros für die Hauptnivellements und Wasserstandsbeobachtungen).

Hristow, W.: Die Gauß-Krügerschen Koordinaten auf dem Ellipsoid. Leipzig-Berlin 1943.

Institut Geographique Militaire (IGM): Cartography in Belgium. World Cartography, Vol. III, New York 1953, S. 47-56.

International Association of Geodesy (IAG): Subcommission for the European Reference Frame (EUREF), Publication No 1. Veröffentlichungen der Bayerischen Kommission für die Internationale Erdmessung der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Astronomisch-Geodätische Arbeiten Heft Nr. 52, München 1992, S. 146-169.

Isotov, A.: Das in der UdSSR angewandte Bezugsellipsoid und die geodätischen Ausgangsdaten. Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen, Reihe III, Nr. 13, 1961.

Kaestner, W.: Vordrucke und Tafeln zur Umformung sphäroidischer Koordinaten eines Kataster-Koordinatensystems des Landes Nordrhein-Westfalen in konforme Koordinaten des Meridianstreifen Koordinatensystems und umgekehrt. Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen, Bonn-Bad Godesberg 1950a.

- : Vordrucke, Tabellen und Tafeln zur Doppelkoordinierung von FP im Lande Nordrhein-Westfalen. Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen, Bonn-Bad Godesberg 1950b.

Kampmann, G.: Robuster Ausreißertest mit Hilfe der L1-Norm-Methode. AVN, 93. Jg., 1986, S. 139-147.

- : Asymptotische Prüfung von L1-Klaffungen im Kongruenzmodell der Deformationsanalyse. AVN, 98. Jg., 1991, S. 221-229.

- : Günstigste Netzeinpassung mit Minimax-Koordinatenklaffungen nach Tschebycheff. AVN, 99. Jg., 1992, S. 260-264.

Kampmann, J./Spata, M./Petri, M.: Kombinatorische Normschätzung bei 2D-Transformationen im nordrhein-westfälischen ALK-Vorverarbeitungsprogramm DIVA. NÖV, 27. Jg., 1994, S. 57-71.

Klotz, J.: Eine analytische Lösung der Gauß-Krüger-Abbildung. ZfV, 118. Jg., 1993, S. 106-116.

Klugmann, H.J.: Übersicht der Maßstabsfaktoren im Netz 1977 1. und 2.Ordnung von Nordrhein-Westfalen. NÖV, 25. Jg., 1992, S. 18-22 mit 1 Beilage.

Koch, K.R.: Parameterschätzung und Hypothesentest in linearen Modellen. 2.Auflage, Bonn 1987, S. 328-332.

Kraus, K.: Untersuchungen zur ebenen verketteten linearen Ähnlichkeits-Transformation. ZfV, 91. Jg., 1966, S. 123-130.

Kremers, J.: Deformationsanalyse der Erdoberfläche beim Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen. NÖV, 23. Jg., 1990, S. 9-32.

- : Das Deutsche Haupthöhennetz im europäischen Umfeld. NÖV, 27. Jg., 1994, S. 84-90.

Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen (LVermA NRW): Terminologie in der Grundlagenvermessung, Teil I: Terminologie bei trigonometrischen Vermessungen, Abschnitt 5 Koordinatenumformung. Bonn-Bad Godesberg 1987a.

- : Schlüsselzahlenkatalog - Grundlagenvermessung. Bonn-Bad Godesberg 1987b.

- : Übernahme der Ergebnisse der GPS-Messungen in den Nachweis der TP (Stand: 1.5.1989). Bonn-Bad Godesberg 1989a.

- : Programmbeschreibung EDWIN. Bonn-Bad Godesberg 1989b.

- : Punktdatenerlaß NRW. Bonn-Bad Godesberg, 1998.

- : Das trigonometrische Festpunktfeld in Nordrhein-Westfalen (TP-Erl.). Bonn-Bad Godesberg

Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen

1993 a.

- : Das Nivellementpunktfeld in Nordrhein-Westfalen (NivP-Erl.). Bonn-Bad Godesberg 1993 b.

Lang, H./Steinberg, J.: Zur Entwicklung der Höhennetze auf dem Territorium der neuen Bundesländer. AVN, 100. Jg., 1993, S. 295-309.

Leismann, M./Klees, R./Beckers, H.: Untersuchung verschiedener Höhensysteme, dargestellt an einer Testschleife in Rheinland-Pfalz. DGK Reihe B Nr. 296, München 1992.

Levasseur, K.: Das Zentraleuropäische Dreiecksnetz. Veröffentlichung des Instituts für Erdmessung, Heft 1, Bamberg 1949, S. 19-96.

- : 50 Jahre Gauß-Krüger-Koordinaten in Österreich. ÖZfV, 48. Jg., 1960, S. 120-135 und 145-160.

Lindstrot, W.: Geodätische Grundlagen für die zivile Nutzung von GPS. BDVI-FORUM, 16. Jg., 1990, S. 385-392.

- : Metergenaue Echtzeitpositionierung mit EPS-RASANT. VR, 58. Jg., 1996, S. 177-185.

Lindstrot, W./Rausch, E./Schlüter, W./Seifert, W.: Die DREF91-GPS-Meßkampagne. ZfV, 117. Jg., 1992, S. 287-294.

Meier, H.: Zur gruppenweisen Umformung von Gauß-Krüger-Koordinaten in Soldner-Koordinaten der preußischen Katastersysteme. AVN, 61. Jg., 1954, S. 125 ff.

- : Zur gruppenweisen Umformung von Gauß-Krüger-Koordinaten in den Nachbarstreifen. AVN, 62. Jg., 1955, S. 45 ff.

Müller, G.: Wiederholungsmessungen im nordrhein-westfälischen Anteil des DHHN 1980-85 und im Netz 2. Ordnung - Erfahrungen, erste Ergebnisse, Ausblick. VR, 52. Jg., 1990, S. 130-149.

Nagel, G.: Das Vermessungs-, Kataster- und Liegenschaftswesen in Frankreich. Mitt. DVW Bayern, 34. Jg., 1982, S. 279-295.

Overhoff, W.: Fehlerverteilung nach Winkel- und Abstandsgewichten bei der Koordinatentransformation. VR, 46. Jg., 1984, S. 210-215.

Pelzer, H. (Hrsg.): Geodätische Netze in der Landes- und Ingenieurvermessung II. Stuttgart 1985.

Preußische Landestriangulation (PrLa): Die Königlich Preußische Landestriangulation, Hauptdreiecke, 7. Teil., Berlin 1895.

Pope, A.J.: The statistics of residuals and the detection of outliers. NOAA Techn. Report NOS 65 NGS 1, U.S. Department of commerce, National Geodetic Survey, Rockville (Md) 1976.

Reichardt, G.: Zur Entwicklung der Realisierungen des Koordinatensystems 1942 in der DDR. In: Arbeiten aus dem Vermessungs- und Kartenwesen der DDR, Band 58, Leipzig 1989, S. 5-22.

Reichsministerium des Innern (RMI): Planheft Großdeutsches Reich - Überblick über die Landesvermessungs- und Kartenwerke. Berlin 1944.

Schmidt, R.: Die Triangulationen in Nordrhein-Westfalen. Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen, Bonn-Bad Godesberg 1960a.

- : Zentraleuropäisches Dreiecksnetz und UTM-Koordinaten. AVN, 67. Jg., 1960b, S. 211-216.
- : Die Bezugsflächen des Lagepunktfeldes und des Höhenpunktfeldes in der Bundesrepublik Deutschland sowie ihre gegenseitigen Beziehungen. In: Kontrolle des Deutschen Hauptdreiecksnetzes durch Macrometer-Messungen 1983-85 - KONMAC, DGK Reihe B Nr. 282, München 1986, S. 97-109.
- : Zur Terminologie und Klarstellung: Was sind NN-Undulationen? ZfV, 116. Jg., 1991, S. 296-300.

- : Einheitliches Bezugssystem in Deutschland und in Europa - ein zusammenfassender Überblick. BDVI-FORUM 3/1992, S. 390-395.
  - : Referenz- und Koordinatensysteme in der deutschen Grundlagenvermessung. NÖV, 28. Jg. 1995, S. 23-67.
- Schmidt, R. und Siebringhaus, H.-J.: Das Hauptdreiecksnetz 1977 in Nordrhein-Westfalen. NÖV, 11. Jg., 1978, S. 106-126.
- Schmitt, G./Illner, M./Jäger, R.: Transformationsprobleme. In: GPS und Integration von GPS in bestehende geodätische Netze, Sonderheft DVW-Landesverein Baden-Württemberg, 38. Jg., 1991, S. 125-142.
- Schneider, E.: Die Normalhöhen in der Praxis. VT, 1960, S. 90-94.
- Schödlbauer, A.: Rechenformeln zur Landesvermessung, Teil 2, Karlsruhe 1982 und Teil 3, Karlsruhe 1984a.
- : Bezugssysteme der Landesvermessung unter Berücksichtigung terrestrischer und satelliten-geodätischer Meß- und Auswerteverfahren. In: Schödlbauer, Welsch (Hrsg.): Satelliten-Dopplermessungen, Schriftenreihe Studiengang Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, Heft 15, München 1984b, S. 63-153.
  - : Höhensysteme der Landesvermessung im Lichte moderner Meßverfahren. In: A. Schödlbauer (Hrsg.): Moderne Verfahren der Landesvermessung, Teil II: Nivellement, Schriftenreihe Studiengang Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München, Heft 38-2, Neuberg 1990, S. 359-395.
- Schroeder, F.: Ein Beitrag zu dem Problem der Koordinatenumformung. ZfV, 61. Jg., 1935, S. 225ff.
- Seeber, G.: Present State of the DÖENAV-Campaign. In: Groten (Hrsg.): GPS-Techniques Applied to Geodesy and Surveying, Heidelberg 1988, S. 201-209.
- : Satellitengeodäsie - Grundlagen, Methoden und Anwendungen. Berlin-New York 1989.
  - : Grundprinzipien zur Vermessung mit GPS. VI, 47. Jg., 1996, S. 53-64.
- Seeger, H.: Reference Systems in Europe. Institut für Angewandte Geodäsie (IfAG), Frankfurt a.M. 1993.
- : Zur Einführung des ETRS in Deutschland. Zeitschrift für das Öffentliche Vermessungswesen des Landes Sachsen-Anhalt, 1. Jg., 1995, S. 75-79.
- Spata, M.: Zur Fertigstellung der TP-Netzerneuerung 2. Ordnung in Nordrhein-Westfalen. NÖV, 24. Jg., 1991, S. 3-26.
- : Zur Fortentwicklung des TP-Netzes 1. Ordnung 1977 in Nordrhein-Westfalen. NÖV, 25. Jg., 1992, S. 10-17.
  - : Neue Übersichtskarten der trigonometrischen Grundlagen des Katasterkartenwerkes in Nordrhein-Westfalen. NÖV, 28. Jg., 1995, S. 181-196.
  - : Historische Pegel und Bezugshöhen in Europa. Deutsches Schifffahrtsarchiv, 21. Jg., Bremerhaven 1998.
- Spata, M./Kühnhold, H.W.: Satellitennavigation mit GPS-Handgeräten. Forum, 20. Jg., 1994, S. 389-395.
- Spata, M./Lindstrot, W.: Zehn Jahre GPS-Vermessung zur TP-Netzerneuerung in Nordrhein-Westfalen. NÖV, 28. Jg., 1995, S. 4-22.
- Spata, M./Lindstrot, W./Schönenberg, K.P.: Abschlußbericht zur TP-Netzerneuerung 2. und 3. Ordnung im Ruhrgebiet 1986/87. Druck: Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen, Bonn-Bad Godesberg 1989.
- Straßer, G.: Ellipsoidische Parameter der Erdfigur (1800-1950). DGK Reihe A, Heft 19, München Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen

1957.

- : UTM-Projektion und GK-Abbildung. VR, 24. Jg., 1962, S. 335-336.

Stückmann, G.: Multiquadratische Interpolation und Restklaffungsverteilung nach Winkel- und Abstandsgewichten - Ein Vergleich zweier Verfahren. NÖV, 19. Jg., 1986, S. 182-194.

Torge, W.: Geodäsie. Sammlung Göschen 2163, Berlin-New York 1975.

- : Drei- und zweidimensionale Modellbildung. In: Pelzer (Hrsg.): Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung, Stuttgart 1980a, S. 113-130.
- : Geodätisches Datum und Datumstransformation. In: Pelzer (Hrsg.): Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung, Stuttgart 1980b, S. 131-140.
- : Dreidimensionale Netze. In: Pelzer (Hrsg.): Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Stuttgart 1985, S. 313-333.

United Nations (UN): The status of world topographic mapping. World Cartography, Vol. XIV, New York 1976.

Vahlensieck, O. und Ottweiler, G.: Die Nivellements im Lande Nordrhein-Westfalen. Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen, Bonn-Bad Godesberg 1951.

Vermessungspunkterlaß I (VP-Erlaß I): Die Bestimmung von Vermessungspunkten der Landesvermessung in Nordrhein-Westfalen. RdErl.d.IM NRW i.d.F.v. 10.4.1984, Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen, Bonn-Bad Godesberg.

Waalewijn, A.: Der Amsterdamer Pegel (NAP). Österreichische ZfV, 74. Jg., 1986, S. 264-270.

Wagner, W.: Die amtliche Kartographie Österreichs seit dem 1. Weltkrieg und ihre topographischen Kartenwerke. In: Die amtliche Kartographie Österreichs, Wien 1970, S. 63-96.

Watermann, H.: Der Vertrieb von amtlichen topographischen Karten durch unseren belgischen Nachbarn. NÖV, 12. Jg., 1979, S. 209-217.

Weber, P.: Entwicklung und Stand der amtlichen Kartographie in Frankreich. KN, 16. Jg., 1966, S. 87-92.

Weber, D.: Das neue gesamtdeutsche Haupthöhenetz DHHN 92. AVN, 101. Jg., 1994, S. 179-194.

Wernhart, H.: Das Bundesmeldenetz. Eich- und Vermessungsmagazin, Nr. 69, 1992, S. 12-18.

Wiens, H.: Flurkartenerneuerung mittels Digitalisierung und numerischer Bearbeitung unter besonderer Berücksichtigung des Zusammenschlusses von Inselkarten zu einem homogenen Rahmenkartenwerk. Heft 17 der Schriftenreihe des Instituts für Kartographie und Topographie der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Bonn 1986.

Wolf, H.: Die Lotabweichungsausgleichung für das Zentraleuropäische Netz. Veröffentlichung des Instituts für Erdmessung, Heft 6, Bamberg 1949, S. 21-44.

- : Die Grundgleichungen der Dreidimensionalen Geodäsie in elementarer Darstellung. ZfV, 88. Jg., 1963, S. 225-233.
- : Die Genauigkeit der für eine Helmert-Transformation berechneten Konstanten. ZfV, 91. Jg., 1966, S. 33-34.
- : Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Bonn 1968.
- : Über die Einführung von Normalhöhen. ZfV, 99. Jg., 1974, S. 1-5.
- : Ausgleichungsrechnung - Formeln zur praktischen Anwendung. Bonn 1975.
- : Multiquadratische Methode und Kollokation. AVN, 88. Jg., 1981, S. 89-95.
- : Datums-Bestimmungen im Bereich der deutschen Landesvermessung. ZfV, 112. Jg., 1987,

S. 406-413.

Zeger, J.: Historische Entwicklung des Präzisionsnivellements in Österreich. Österr. Zeitschrift für Vermessung und Photogrammetrie, 74. Jg., 1986, S. 250 ff.

Zimmermann, B.: Gedanken zur Einführung des NN-Systems vor 100 Jahren. VT, 27. Jg., 1979, S. 236-238.

**Internet-Adressen:**

[www.lverma.nrw.de](http://www.lverma.nrw.de)

[www.sapos.de](http://www.sapos.de)

[www.saposnrw.de](http://www.saposnrw.de)

<http://crs.ifag.de>

## **Anlagen**

- 1 Dimensionen verschiedener Erdellipsoide
- 2 Vorläufige preußische Katastersysteme (1876-1879)
- 3 Endgültige preußische Katastersysteme (1894-1898)
- 4 Bezugssysteme der Preußischen Landesaufnahme und Folgenetze (in NRW)
- 5 Lagebezugssysteme der Nachbarstaaten
- 6 Europaweite Lagebezugssysteme
- 7 Differenzbeträge einiger Höhenbezugsflächen  
in Relation zur Normal-Null-Fläche
- 8 Statusangaben der Koordinaten und Höhen in Nordrhein-Westfalen
- 9 Punktübersicht DREF91-Netz
- 10 Punktübersicht NWREF-Netz

## Anlage 1

**Dimensionen verschiedener Erdellipsoide**

Ellipsoid (Jahr)	a (m)	1 : f
Delambre (1810)	6 376 985	308,6465
Schmidt (1829)	6 376 958,936	297,479
Bessel (1841)	6 377 397,155 <sup>1)</sup>	299,15281285
Clarke (1880)	6 378 249,2	293,466
Hayford (1909)	6 378 388	297,0
= Internat. Ellipsoid 1924		
Krassowski (1940)	6 378 245	298,3
WGS 72	6 378 135,0	298,26
GRS 80	6 378 137,0	298,257222101
WGS 84	6 378 137,0	298,257223563

-----  
1) in legalem Meter

Geodätische Grundlagen					Mathematische Grundlagen		
Netzart, Jahr der Bestimmung	Zentralpunkt	Bezugsellipsoid	Netzorientierung	Netzmaßstab	Abbildungsart, Koordinaten	Koordinatensystem, Nullpunkt, vorl. Koordinaten	Koordinatenachsen, Zählung
Mindener Netze I. und II. Ordnung 1835-1836 u. 1849-1859	Göttinger Sternwarte $B_0 = 51^\circ 31' 47,85''$ $L_0 = 27^\circ 36' 28,30''$ (östl. Ferro)	Schmidt 1829	Anschluss an Hannoversche Landesvermessung 1828-1844	legales Meter, Basis Braak 1820	ordinatentreue Abbildung, rechtwinklig-sphäroidische Koordinaten	<b>V31</b> , Hermannsdenkmal $\rho = 51^\circ 54' 47,182''$ $\lambda = 26^\circ 30' 16,647''$ (östl. Ferro)	Abszisse x = Meridian durch Nullpunkt, pos. nach Norden; Ordinate y = rechtwinklig zur Abszisse, pos. nach Osten
Münstersches Netz I. Ordnung 1836	Göttinger Sternwarte $B_0 = 51^\circ 31' 47,85''$ $L_0 = 27^\circ 36' 28,30''$ (östl. Ferro)	Schmidt 1829	Anschluss an Mindener Netz I. Ordnung 1835-1836	legales Meter, Basis Braak 1820		<b>V32</b> , Münster, Überwasserkirche $\rho = 51^\circ 57' 56,016''$ $\lambda = 25^\circ 17' 14,372''$ (östl. Ferro)	
Netz II. Ordnung im Dortmunder Kohlengebiet 1876-1877	TP(I) Rauenberg $B_0 = 52^\circ 27' 12,021''$ $L_0 = 31^\circ 02' 04,928''$ (östl. Ferro)	Bessel 1841	Anschluss an Hannoversche Landesvermessung 1828-1844	legales Meter, Basis Braak 1871		<b>V33</b> , Bochum, kath. Kirche $\rho = 51^\circ 29' 01,254''$ $\lambda = 24^\circ 53' 16,059''$ (östl. Ferro)	

#### Vorläufige preußische Katastersysteme (1876-1879)

Geodätische Grundlagen					Mathematische Grundlagen		
Netzart, Jahr der Bestimmung	Zentralpunkt	Bezugsellipsoid	Netzorientierung	Netzmaßstab	Abbildungsart, Koordinaten	Koordinatensystem, Nullpunkt, vorl. Koordinaten	Koordinatenachsen, Zählung
Arnsberg Netz I. Ordnung 1816-1819 und 1822	TP(I) Köln, Dom, Dachreiter 1744 $B_0 = 50^\circ 56' 42,6755''$ $L_0 = 24^\circ 37' 24,9374''$ (östl. Ferro)	nicht bekannt	Anschluss an Oberhessisches Netz I. Ordnung 181-1816	legales Meter, Basis Darmstadt 1808	ordinatentreue Abbildung, rechtwinklig-sphäroidische Koordinaten	<b>V34</b> , Homert $\rho = 51^\circ 15' 52,27''$ $\lambda = 25^\circ 46' 18,39''$ (östl. Ferro)	Abszisse x = Meridian durch Nullpunkt, pos. nach Norden; Ordinate y = rechtwinklig zur Abszisse, pos. nach Osten
Rheinisches Dreiecksnetz 1867-1877	Bonner Sternwarte $B_0 = 50^\circ 43' 45,00''$ $L_0 = 0^\circ$	Bessel 1841	Azimet Bonner Sternwarte → Meridianmarke Venusberg $\alpha = 179^\circ 59' 40,23''$	legales Meter, Basis Bonn 1847		<b>V38</b> , Köln, Dom, Dachreiter, Teich 1860 $\rho = 50^\circ 56' 33,346''$ $\lambda = 0^\circ 08' 22,715''$ (westl. Bonn)	
Rheinisches Dreiecksnetz, 1867-1877	Bonner Sternwarte $B_0 = 50^\circ 43' 45,00''$ $L_0 = 0^\circ$	Bessel 1841	Azimet Bonner Sternwarte → Meridianmarke Venusberg $\alpha = 179^\circ 59' 40,23''$	legales Meter, Basis Bonn 1847		<b>V39</b> , Langschoß, Holzpfeiler $\rho = 50^\circ 40' 02,667''$ $\lambda = 0^\circ 48' 33,185''$ (westl. Bonn)	

#### Vorläufige preußische Katastersysteme (1876-1879)

Geodätische Grundlagen					Mathematische Grundlagen		
Netzart, Jahr der Bestimmung	Zentralpunkt	Bezugsellipsoid	Netzorientierung	Netzmaßstab	Abbildungsart, Koordinaten	Koordinatensystem, Nullpunkt, vorl. Koordinaten	Koordinatenachsen, Zählung
Preußische Landesaufnahme 1875-1898	TP (I) Rauenberg $B_0 = 52^\circ 27' 12,021''$ $L_0 = 31^\circ 02' 04,928''$ (östl. Ferro)	Bessel 1841	Azimut Rauenberg → Berlin, Marienkirche $\alpha = 19^\circ 46' 04,87''$	Meter der Landesaufnahme, fünf Basismessungen Berlin 1846, Braak 1871, Göttingen 1880, Meppen 1883, Bonn 1892	ordinatentreue Abbildung, rechtwinklig-sphäroidische Koordinaten	<b>31</b> Hermannsdenkmal $\rho = 51^\circ 54' 46,8593''$ $\lambda = 26^\circ 30' 25,8667''$ (östl. Ferro) <hr/> <b>32</b> Münster, Überwasserkirche $\rho = 51^\circ 57' 55,7151''$ $\lambda = 25^\circ 17' 24,0598''$ (östl. Ferro) <hr/> <b>33</b> Bochum, Peter-Paul-Kirche $\rho = 51^\circ 29' 01,4472''$ $\lambda = 24^\circ 53' 16,1696''$ (östl. Ferro) <hr/> <b>34</b> Homert $\rho = 51^\circ 15' 53,2853''$ $\lambda = 25^\circ 46' 24,7338''$ (östl. Ferro)	Abszisse x = Meridian durch Nullpunkt, pos. nach Norden; Ordinate y = rechtwinklig zur Abszisse, pos. nach Osten

Endgültige preußische Katastersysteme (1894-1898)

Geodätische Grundlagen					Mathematische Grundlagen		
Netzart, Jahr der Bestimmung	Zentralpunkt	Bezugsellipsoid	Netzorientierung	Netzmaßstab	Abbildungsart, Koordinaten	Koordinatensystem, Nullpunkt, vorl. Koordinaten	Koordinatenachsen, Zählung
Preußische Landesaufnahme 1875-1898	TP (I) Rauenberg $B_0 = 52^\circ 27' 12,021''$ $L_0 = 31^\circ 02' 04,928''$ (östl. Ferro)	Bessel 1841	Azimet Rauenberg → Berlin, Marienkirche $\alpha = 19^\circ 46' 04,87''$	Meter der Landesaufnahme, fünf Basismessungen Berlin 1846, Braak 1871, Göttingen 1880, Meppen 1883, Bonn 1892	ordinatentreue Abbildung, rechtwinklig-sphäroidische Koordinaten	<b>38</b> Köln, Dom, Dachreiter 1860 $\rho = 50^\circ 56' 33,2607''$ $\lambda = 24^\circ 37' 32,3136''$ (östl. Ferro) <hr/> <b>39</b> Langschoß, Festleg. 1.O. $\rho = 50^\circ 40' 02,5836''$ $\lambda = 23^\circ 57' 21,6853''$ (östl. Ferro)	Abszisse x = Meridian durch Nullpunkt, pos. nach Norden; Ordinate y = rechtwinklig zur Abszisse, pos. nach Osten

Endgültige preußische Katastersysteme (1894-1898)

Geodätische Grundlagen					Mathematische Grundlagen			
Netzart, Jahr der Bestimmung	Zentralpunkt	Bezugs-ellipsoid	Netzorientierung	Netzmaßstab	Abbildungsart, Koordinaten	Nullpunkt	Koordinatenachsen, Zählung	Koordinatenzuschlag
Preußische Landesaufnahme (PrLA) 1875-1904 1909 (Lippe)	TP (I) Rauenberg 1865 $B_0 = 52^\circ 27' 12,021''$ $L_0 = 31^\circ 92' 04,928''$ (östl. Ferro)	Bessel 1841	Azimet Rauenberg → Berlin, Marienkirche 1859 $\alpha = 19^\circ 46' 04,87''$	Meter der Landesaufnahme, fünf Basis-messungen Berlin 1846, Braak 1871, Göttingen 1880, Meppen 1883, Bonn 1892	rechtwinklig konforme Doppelprojektion, Schreibersche und geographische Koordinaten	Schnittpunkt der Abszisse mit dem Normalparallelkreis der Gaußschen Projektion vom Ellipsoid auf die Kugel $B_E = 52^\circ 42' 02,5325''$ $B_K = 52^\circ 40' 00,0000''$ $R_K = 6383037,564 \text{ m}$	Abszisse x = Hauptmeridian $31^\circ$ östl. Ferro, pos. nach Norden; Ordinate y = rechtwinklig zur Abszisse, pos. nach Osten	x = 0 y = Kennung +500 km
Deutsches Einheitssystem 1923	Nominell: Potsdam, Helmerdturm				rechtwinklig konforme Abbildung nach Gauß-Krüger	Schnittpunkt der Abszissenachse mit Äquator	Längen östl. Greenwich, $\Delta L = 17^\circ 40'$	
Reichsdreiecksnetz (RDN) 1940					in $3^\circ$ breiten Meridianstreifen, Gauß-Krüger-Koordinaten		Abszisse x (Hochwert) = Hauptmeridian $L_0 = 6^\circ, 9^\circ, \dots$ östl. Greenwich, pos. nach Norden; Ordinate y (Rechtswert) = rechtwinklig zur Abszisse, pos. nach Osten	
Deutsches Hauptdreiecksnetz (DHDN) nach 1945 <b>Netz 1977</b> (in NRW) seit 1977							Maßstabsfaktor $m_0=1$	

Bezugssysteme der Preußischen Landesaufnahme und Folgenetze (in NRW)

Geodätische Grundlagen					Mathematische Grundlagen			
Netzart, Jahr der Bestimmung	Zentralpunkt	Bezugs-ellipsoid	Netzorientierung	Netzmaßstab	Abbildungsart, Koordinaten	Nullpunkt	Koordinatenachsen, Zählung	Koordinatenzuschlag
<b>Belgien</b>  Neuausgleichung der Triangulation von 1851-1873, 1924-1926	TP (I) Lommel (Signal) $B_0 = 51^\circ 10' 06,88''$ $L_0 = 5^\circ 18' 08,05''$ (östl. Greenwich)	Intern. Ellipsoid 1924	Azimut Lommel (Signal) → Lommel (Turm) $\alpha = 207,753718^{\text{gon}}$ bzw. $\alpha = 186^\circ 58' 42,05''$	Intern. Meter, Basis Lommel 1851-1852 Basis Ostende 1853	Konforme Lambertabbildung mit zwei längentreuen Breitenkreisen $B_1 = 49^\circ 50'$ $B_2 = 51^\circ 10'$	Kegelspitze	Abszisse x = senkrecht zur Ordinate durch die Kegelspitze, pos. nach Osten; Ordinate y = Meridian durch Brüsseler Sternwarte, pos. nach Norden	x = +150 km y = +5400 km
Triangulation 1929-1949, Belgisches Datum ( <b>LB50</b> )	TP (I) Lommel (Signal) $B_0 = 51^\circ 10' 06,88''$ $L_0 = 0^\circ 56' 02,14''$ (östl. Brüssel)			Basis Brügge 1938, Basis Moll 1939				
Neuausgleichung nach 1972, Belgisches Datum ( <b>LB72</b> )	Sternwarte Uccle $B_0 = 50^\circ 47' 57,704''$ $L_0 = 4^\circ 21' 24,983''$ (östl. Greenwich)		neues Azimut Uccle → Kester (Iron Man) $\alpha = 262^\circ 08' 37,95''$					

### Lagebezugssysteme der Nachbarstaaten

Geodätische Grundlagen					Mathematische Grundlagen			
Netzart, Jahr der Bestimmung	Zentralpunkt	Bezugs-ellipsoid	Netzorientierung	Netzmaßstab	Abbildungsart, Koordinaten	Nullpunkt	Koordinatenachsen, Zählung	Koordinatenzuschlag
<b>Dänemark</b>  Europäisches Datum 1950 <b>(ED50)</b> seit 1965	Potsdam, Helmert-turm (Rechenausgangspunkt) $B_0 = 52^\circ 22' 51,4456''$ $L_0 = 13^\circ 03' 58,9283''$ (östl. Greenwich)	Intern. Ellipsoid 1924	abgeleitet aus ED50 (ZEN)	Intern. Meter, abgeleitet aus ED50 (ZEN)	universale transversale Merkatorprojektion (UTM) mit 6° breiten Meridianstreifen	Schnittpunkt des Hauptmeridians 9°, 15° östl. Greenwich mit Äquator	Abszisse N (North) = Hauptmeridian, pos. nach Norden; Ordinate E (East) = rechtwinklig zur Abszisse, pos. nach Osten  Maßstabsfaktor $m_0 = 0,9996$	N = 0 km E = Kennung +500 km

#### Lagebezugssysteme der Nachbarstaaten

Geodätische Grundlagen					Mathematische Grundlagen			
Netzart, Jahr der Bestimmung	Zentralpunkt	Bezugs-ellipsoid	Netzorientierung	Netzmaßstab	Abbildungsart, Koordinaten	Nullpunkt	Koordinatenachsen, Zählung	Koordinatenzuschlag
<b>ehemalige DDR</b>  Astronomisch-Geodätisches Netz ( <b>AGN</b> ) im System 1942, Realisierung 1983 im <b>System 42/83</b>	Pulkowo	Krassowski 1940	Lotabweichungsausgleichung	Intern. Meter, sechs Streckenmessungen Grevesmühlen, Wolmirstedt, Stadtilm, Anklam, Fürstenwalde, Bautzen	rechtwinklig konforme Abbildung nach Gauß-Krüger in 3° und 6° breiten Meridianstreifen	Schnittpunkt des Hauptmeridians mit Äquator	Abszisse x (Hochwert) = Hauptmeridian, pos. nach Norden; Ordinate y (Rechtswert) = rechtwinklig zur Abszisse, pos. nach Osten  Maßstabsfaktor $m_0=1$	$x = 0$ $y =$ Kennung +500 km
System 1940, Realisierung 1983 im <b>System 40/83</b>		Bessel 1841	abgeleitet aus Reichsdreiecksnetz (RDN) 1940	Meter der Landesaufnahme, abgeleitet aus RDN				

#### Lagebezugssysteme der Nachbarstaaten

Geodätische Grundlagen					Mathematische Grundlagen			
Netzart, Jahr der Bestimmung	Zentralpunkt	Bezugs-ellipsoid	Netzorientierung	Netz-maßstab	Abbildungsart, Koordinaten	Nullpunkt	Koordinatenachsen, Zählung	Koordinatenzuschlag
<b>Frankreich</b>  Neues Dreiecksnetz nach 1900 (NTF)	Paris, Kreuz des Panthéon $B_0 = 54,273618^{\text{gon}}$ $L_0 = 0,010693^{\text{gon}}$ (östl. Paris) bzw. $B_0 = 48^{\circ}50'46,52''$ $L_0 = 2^{\circ}20'48,59''$ (östl. Greenwich)	Clarke 1880	Paris, Panthéon → Rosny $\alpha = 281,672728^{\text{gon}}$	Intern. Meter	Konforme Lambertabbildung mit zwei längentreuen Breitenkreisen $B_1 = 53^{\text{gon}}$ $B_2 = 56^{\text{gon}}$  "Lambert Nord de Guerre" (militär. System bis 1939)	Schnittpunkt des Meridians $6^{\text{gon}}$ östl. Paris mit dem Breitenkreis $B = 55^{\text{gon}}$	Abszisse $x =$ Breitenkreis $55^{\text{gon}}$ , pos. nach Osten; Ordinate $y =$ Meridian $6^{\text{gon}}$ östl. Paris, pos. nach Norden	$x = +500 \text{ km}$ $y = +300 \text{ km}$
					Seit 1921 ziviles System: vier Abbildungssysteme nach Lambert mit je zwei längentreuen Breitenkreisen I) Nord: $B_0 = 55^{\text{gon}}$ II) Centre: $B_0 = 52^{\text{gon}}$ III) Sud: $B_0 = 49^{\text{gon}}$ IV) Korsika: $B_0 = 46,85^{\text{gon}}$	jeweils Schnittpunkt des Meridians durch Paris mit den Breitenkreisen $B_0$	Abszisse $x =$ jeweiliger Breitenkreis $B_0$ , pos. nach Osten; Ordinate $y =$ Meridian durch Paris, $L_0 = 0^{\text{gon}}$ , pos. nach Norden  Maßstabsfaktor $m_0 = 0,999877$	$x = +600 \text{ km}$ $y = +200 \text{ km}$

Geodätische Grundlagen					Mathematische Grundlagen			
Netzart, Jahr der Bestimmung	Zentralpunkt	Bezugs-ellipsoid	Netzorientierung	Netz-maßstab	Abbildungsart, Koordinaten	Nullpunkt	Koordinatenachsen, Zählung	Koordinatenzuschlag
<b>Luxemburg</b>  Neues Dreiecksnetz 1927-1938	nörtl. Endpunkt der Basis Habay-la-Neuve $B_0 = 49^\circ 43' 24,408''$ $L_0 = 5^\circ 38' 22,470''$ (östl. Greenwich)	Intern. Ellipsoid 1924	Azimet Habay-la-Neuve → Rulles $\alpha = 138^\circ 31' 25,961''$	Intern. Meter, Basis bei Habay-la-Neuve 1927	rechtwinklig konforme Abbildung nach Gauß-Krüger	Schnittpunkt von Hauptmeridian $L_0 = 6^\circ 10'$ mit Breitenkreis $B_0 = 49^\circ 50'$	Abszisse x = senkrecht auf Ordinate, pos. nach Osten; Ordinate y = Hauptmeridian durch Nullpunkt, pos. nach Norden	x = +80 km y = +100 km
<b>Niederlande</b>  Rijksdriehoeksmeting (RD) 1885-1928	Amersfoort, Turm Liebfreuenkirche $B_0 = 52^\circ 09' 22,178''$ $L_0 = 5^\circ 23' 15,500''$ (östl. Greenwich)	Bessel 1841	Azimet Amersfoort → Utrecht $\alpha = 248^\circ 35' 19,891''$	Intern. Meter, abgeleitet von Basis Bonn 1892	rechtwinklig stereographische Abbildung $R_0 = 6382645 \text{ m}$	Amersfoort, Turm Liebfrauenkirche	Abszisse x = rechtwinklig auf Ordinate, pos. nach Osten; Ordinate y = Meridian durch Nullpunkt, pos. nach Norden  Maßstabsfaktor $m_0 = 0,999906$	seit 1938 x = +155 km y = +463 km

#### Lagebezugssysteme der Nachbarstaaten

Geodätische Grundlagen					Mathematische Grundlagen			
Netzart, Jahr der Bestimmung	Zentralpunkt	Bezugs-ellipsoid	Netzorientierung	Netz-maßstab	Abbildungsart, Koordinaten	Nullpunkt	Koordinaten-achsen, Zählung	Koordinaten-zuschlag
<b>Österreich</b>  dritte Triangulation 1862-1898	Wien; Hermannskogel; Habsburgwarte $B_0 = 48^{\circ}16'15,29''$ $L_0 = 33^{\circ}57'41,06''$	Bessel 1841	Azimet Hermannskogel → Hundsheimer Berg $\alpha = 107^{\circ}31'41,70''$	Intern. Meter, Basis bei Josefstadt (Böhmen) 1862	rechtwinklig konforme Abbildung nach Gauß-Krüger in 3° breiten Meridianstreifen	Schnittpunkt der Hauptmeridiane $L_1 = 28^{\circ}$ östl. Ferro $L_2 = 31^{\circ}$ östl. Ferro $L_3 = 34^{\circ}$ östl. Ferro mit Äquator	Abszisse x = Hauptmeridian, pos. nach Norden; Ordinate y = rechtwinklig zur Abzisse, pos. nach Osten, neg. nach Westen  Maßstabsfaktor $m_0 = 1$	
<b>Schweiz</b>  Neue Landesvermessung (CH-1903) nach 1900	Meridianmarke der alten Sternwarte Bern $B_0 = 46^{\circ}57'08,66''$ $L_0 = 7^{\circ}26'22,50''$	Bessel 1841	Azimet Bern → Röthi $\alpha = 11^{\circ}12'05,24''$ Bern → Gurten $\alpha = 174^{\circ}01'42,61''$ Bern → Chasseral $\alpha = 305^{\circ}11'33,23''$	Intern. Meter, fünf Basen 1939	konforme schiefachsige Zylinder- projektion	Meridianmarke der alten Sternwarte Bern	Abszisse x = Meridian durch Nullpunkt, pos. nach Norden; Ordinate y = Berührungskreis durch Nullpunkt, pos. nach Osten	x = +200 km y = +600 km

#### Lagebezugssysteme der Nachbarstaaten

Geodätische Grundlagen					Mathematische Grundlagen			
Netzart, Jahr der Bestimmung	Zentralpunkt	Bezugs-ellipsoid	Netzorientierung	Netzmaßstab	Abbildungsart, Koordinaten	Nullpunkt	Koordinatenachsen, Zählung	Koordinatenzuschlag
Europäisches Datum 1950 (ED50) 1949-1951	Potsdam, Helmert-turm (Rechenausgangspunkt) $B_0 = 52^\circ 22' 51,4456''$ $L_0 = 13^\circ 03' 58,9283''$ (östl. Greenwich)	Intern. Ellipsoid 1924	Lotabweichungsausgleichung	Intern. Meter, abgeleitet aus RDN 1940	universale transversale Mer-katorpro-jektion (UTM) mit 6° breiten Meridianstreifen	Schnittpunkt des Hauptmeridians 3°, 9°, ... östl. Greenwich mit Äquator	Abszisse N (North) = Hauptmeridian, pos. nach Norden; Ordinate E (East) = rechtwinklig zur Abzisse, pos. nach Osten  Maßstabsfaktor $m_0 = 0,9996$	N = 0 km E = Kennung +500 km
Europäisches Datum 1987 (ED87) 1954-1987	München, Frauenkirche (im System ED50) $B_0 = 48^\circ 08' 22,2273''$ $L_0 = 11^\circ 23' 26,4862''$ (östl. Greenwich)		abgeleitet aus ED50	Intern. Meter, abgeleitet aus EDM-Streckenmessungen				
Europäisches terrestrisch. Referenzsystem 1989 (ETRS 89) 1989	Lagerung auf Primärstationen des ITRS	GRS80-Ellipsoid 1980	abgeleitet aus dem ITRS	Intern. Meter, abgeleitet aus dem ITRS				

## Anlage 7

**Differenzbeträge  
einiger Höhenbezugsflächen  
in Relation zur Normal-Null-Fläche**

Land	Pegel	NN-Höhe minus Landeshöhe (m)
Belgien	Ostende	- 2,30
Dänemark	Kopenhagen	- 0,09
ehem. DDR	Kronstadt	+0,15
Frankreich	Marseille	- 0,25
Luxemburg	Amsterdam	0,00
Niederlande	Amsterdam	+0,02
Österreich	Triest	- 0,25
Polen	Kronstadt	+0,15
Schweiz	Genf	- 0,31
Tschechien	Kronstadt	+0,15

## Anlage 8

**Statusangaben**  
der  
**Koordinaten und Höhen**  
**in Nordrhein-Westfalen**

Lage- system	Abbildung				
	Geographisch	Gauß-Krüger	UTM	ell. Höhe	XYZ
PrLA	801	101	---	301	---
Netz 77	877	177	---	300	---
ED 50	850	---	450	---	---
ETRS 89	889	---	489	310	389

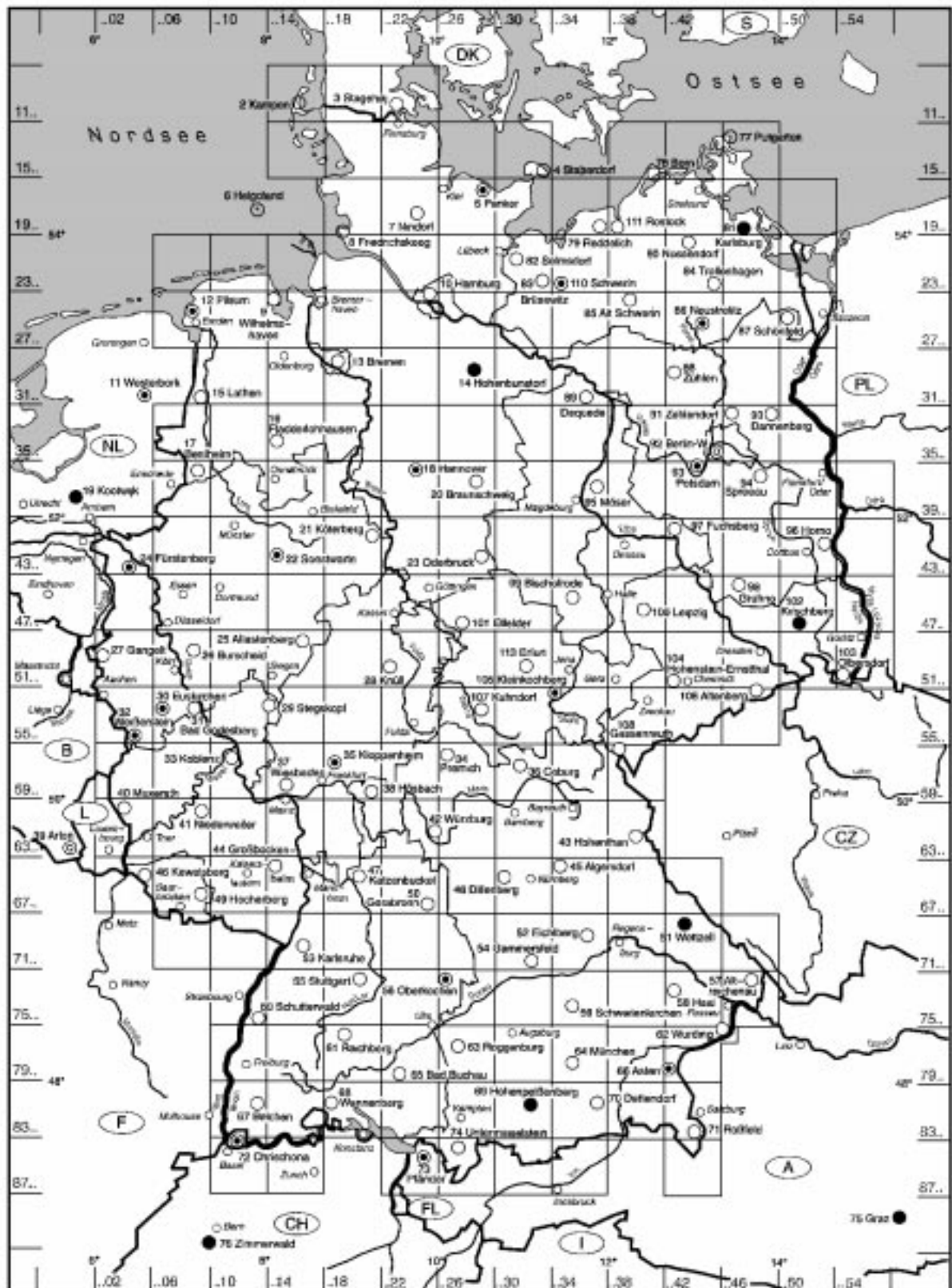
Höhen- system	Höhenmodell	
	NN-Höhe	NHN-Höhe
DHHN 12	100	---
DHHN 92	---	160

Undulations- system	DHDN Bessel-Ellipsoid	ETRS 89 GRS80-Ellipsoid
DHHN 12	784	712
DHHN 92	792	789

# DREF 1991

## Deutsches Referenznetz im ETRS 89

Anlage 9



- ITRF
- ⊙ EUREF D/NL 93
- ⊙ EUREF 89
- DREF

Folgende Punkte sind nicht dargestellt

- 1 Osnabrück
- 109 Bonn
- 112 Halle (Zentral)

Kartographie und Druck: Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen 1996



Ein Kartenblatt der Topographischen Karte 1:50 000 (TK 102) wird mit einer westseitigen Blattnummer bezeichnet, die aus den roten Zahlen der Zeilen und Spalten zusammensetzt und der ein „C“ vorangestellt wird (z.B. C 4722).

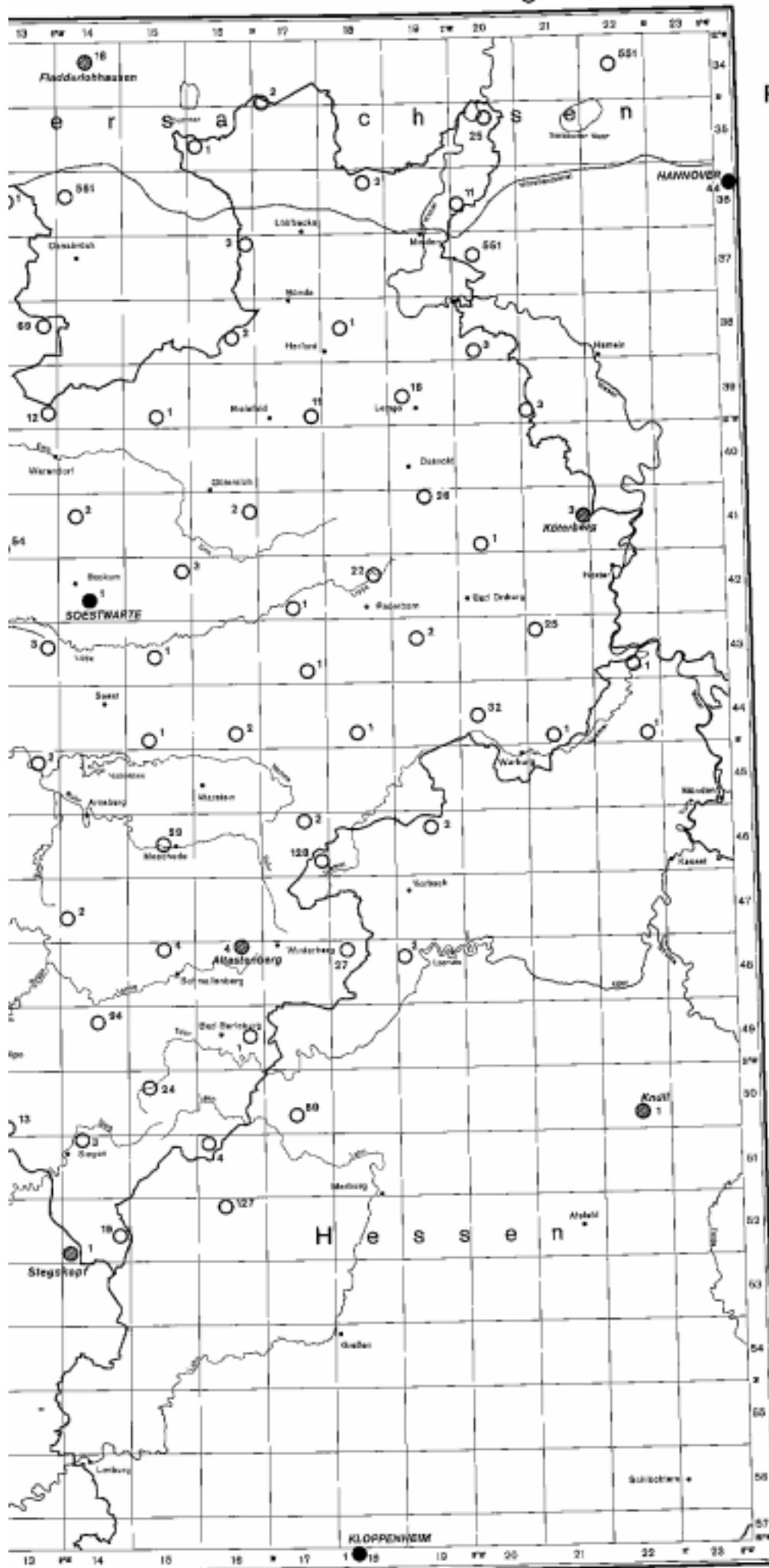
Stand: 13. 10. 1994



# Referenzpunkte des ETRS 89 in Nordrhein-Westfalen

Stand 1994

Maßstab 1 : 1 000 000



Die Referenzpunkte stammen aus den Netzen:

● EUREF 1993

● DREF 1991

○ NWREF 1993

1) Europäische Referenznetz

2) Deutsches Referenznetz

3) Nordrhein-Westfälisches Referenznetz